Pour jeu : 103.14, 103.18, 103.20

1.4 Application de la diagonalisation

1.4.1 Calcul des puissances successives d'une matrice diagonalisable

Méthode 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

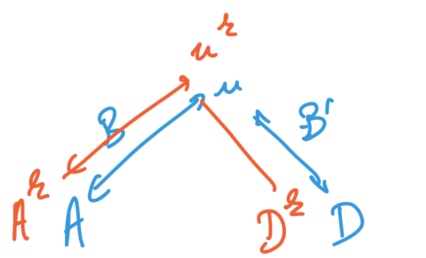
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence :

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ et } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^k = PD\underbrace{P^{-1}P}D\underbrace{P^{-1}P}D\underbrace{P^{-1}\cdots}\underbrace{P}DP^{-1}$$

$$= PD^kP^{-1}$$



• Réduisons A

$$\ast\ \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & 1-X & 0 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ X+1 & X & -1 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{dév } L_2}{=} (X-1)\,(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} X+1 & -1 \\ -2 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)(X^2+X-2)$$

$$= (X-1)^2(X+2)$$

donc A a pour vp 1 (double) et -2 (simple)

$*$ recherche de $E_1(A)$

$$E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$$

$$= \text{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_1 = C_2 = -C_3 \\ \text{rang } 1 \end{array}$$

$$= \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2}\right)$$

$*$ Recherche de $E_{-2}(A)$

$$E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I_3)$$

$$= \text{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_1 + C_2 = C_3 \\ \text{rang } 2 \end{array}$$

$$= \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

$*$ χ_A scindé, $\dim E_{-2}(A) = m(-2)$, $\dim(E_1(A)) = m(1)$

donc A diagonalisable et, en posant :

$$P = (V_1 | V_2 | V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a $\quad A = P D P^{-1}$

Remarque : On note $u : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto AX$$

canoniquement associée à A.

$$P = \mathrm{Pass}\left((E_1, E_2, E_3) \longrightarrow (V_1, V_2, V_3)\right)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

$$D = \mathrm{Mat}(u, (V_1, V_2, V_3)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

L'ordre des λ_i dépend du choix de l'ordre des V_i

On aurait pu choisir $\quad P = (V_3 | V_1 | V_2)$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculons A^k

Par réc. $\quad A^k = P D^k P^{-1}$

où $\quad D^k = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & (-2)^k \end{pmatrix}$

- **On calcule P^{-1} :**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2'$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3$

$L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3$

D'où $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On conclut:

$$A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & (-2)^k \\ -1 & 0 & (-2)^k \\ 0 & 1 & -(-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^k & -1+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ -1+(-2)^k & 2+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ 1-(-2)^k & 1-(-2)^k & 2+(-2)^k \end{pmatrix}$$

Méthode 2. En connaissant un polynôme annulateur de A, on peut exploiter une division euclidienne.

Exemple. À nouveau avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer un polynôme annulateur de degré 2 et en déduire l'expression de A^k.

On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= -A + 2I_3$

Tiens ! $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$ annule A

$Sp(A) = \{1, -2\}$ coïncidence ?

$A^2 = -A + 2I_3$

Par réc A^k est CL de A et I_3

Supposons $\exists\, \alpha_k, \beta_k$ tq $A^k = \alpha_k A + \beta_k I_3$

alors $A^{k+1} = \alpha_k A^2 + \beta_k A$

$= \alpha_k(-A + 2I_3) + \beta_k A$

$= (\beta_k - \alpha_k) A + 2\alpha_k I_3$

on pose $\begin{cases} \alpha_{k+1} = \beta_k - \alpha_k \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_k \end{cases}$

Méthode : division de X^k par $X^2 + X - 2$

$\exists! (Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\begin{cases} X^k = Q(X^2+X-2) + R \\ R \in \mathbb{R}_1[X] \quad \text{car } \deg X^2+X-2 = 2 \end{cases}$$

ie $\exists \alpha_k, \beta_k$ tq

$$X^k = Q(X^2+X-2) + \alpha_k X + \beta_k$$

Donc $$A^k = Q(A)\underbrace{(A^2+A-2I_3)}_{=0} + \alpha_k A + \beta_k I_3$$

$$= \alpha_k A + \beta_k I_3$$

<u>Déterminons α_k et β_k</u>

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = \beta_k - \alpha_k \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_k \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha_0 = 0 \\ \beta_0 = 1 \end{matrix}$$

$$\alpha_{k+2} = 2\alpha_k - \alpha_{k+1}$$

$$\alpha_{k+2} + \alpha_{k+1} - 2\alpha_k = 0$$

suite réc. linéaire d'ordre 2 à coeff. constant

de pol. caractéristique $X^2+X-2 = (X-1)(X+2)$

donc $\exists \lambda, \mu$ tq $\forall k \quad \alpha_k = \lambda 1^k + \mu(-2)^k$

avec $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$

on a donc $\quad 0 = \lambda + \mu$

$\quad 1 = \lambda - 2\mu$

donc $-1 = +3\mu$ et $3\lambda = 1$

Bref : $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = -\frac{1}{3}$

puis $\beta_k = 2\alpha_{k-1}$ $\quad \forall k \geq 1$

donc $A^k = \frac{1}{3}\left(1-(-2)^k\right) A + \frac{2}{3}\left(1-(-2)^{\cancel{k}\ k-1}\right) I_3$

pour $k \geq 1$

Autre méthode :

$$X^k = Q(X^2+X-2) + \alpha_k X + \beta_k$$

en évaluant en 1 et -2

$$1 = \alpha_k + \beta_k$$

$$(-2)^k = -2\alpha_k + \beta_k$$

d'où les expressions de α_k et β_k.

Méthode 3. Lorsque la matrice s'écrit par exemple : $\lambda I + J$ où J est nilpotente ou à puissance simple, on peut exploiter la formule du binôme de Newton.

→ pour des matrices qui commutent

Exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer B^k lorsque $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

Exemple. Déterminer les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

1.4.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Définition. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ satisfait une **relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+(p-1)} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$$

On appelle **~~équation~~ caractéristique** associée à cette relation de récurrence l'équation :

$$r^p = a_{p-1}r^{p-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

Exemple. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 étudiées en première année rentrent dans ce cadre.

polynôme caractéristique $X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1 X - a_0$

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad \forall n$$

$$\iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \forall n$$

$$\iff U_{n+1} = A\, U_n \quad \forall n$$

où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$

Par récurrence : $\forall n \quad U_n = A^n U_0$

Pour calculer A^n, on réduit A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -b & X-a \end{vmatrix}$$

$$= X^2 - aX - b$$

polynôme caractéristique

on suppose qu'il y a 2 racines distinctes

$$\chi_A = (X-\lambda)(X-\mu) \qquad \lambda \neq \mu$$

scindé simple donc A diagonalisable

donc $\exists P \in GL_2(\mathbb{K})$ tq $A = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$

donc $U_n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}U_0$

$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}$

$$= \left(V_1 \middle| V_2\right)\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda^n V_1 \middle| \mu^n V_2\right)\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\heartsuit\,\lambda^n + \spadesuit\,\mu^n\\ \diamondsuit\,\lambda^n + \clubsuit\,\mu^n\end{pmatrix}$$

donc il existe 2 scalaires $\heartsuit$ et $\spadesuit$ (indép de n)

tq $\forall n \quad u_n = \lambda^n \heartsuit + \mu^n \spadesuit$

Proposition. L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constant est un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$.

$$u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + a_{p-2} u_{n+p-2} + \cdots + a_0 u_n$$

Technique d'étude. On conserve les notations de la définition, et on définit :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

La suite $(u_n)_n$ vérifie la relation de récurrence précédente si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

Par suite, la suite X_n est uniquement déterminée par X_0 et on a par récurrence :

$$X_n = A^n X_0$$

Calcul de A^n

$$\chi_A = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - \cdots - a_0$$

car pol caract d'une matrice compagnon.

si p v.p distincts

$$X_n = (V_1 | \cdots | V_p) \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

u_n

$$\begin{pmatrix} u_n \\ * \\ | \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{CL de } \lambda_1^n \cdots \lambda_p^n \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Remarque. *La matrice A est la matrice compagnon du polynôme :*

$$P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

donc $\chi_A = P$. Les racines de l'équation caractéristique sont les valeurs propres de la matrice A.

Exemple. Déterminer la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+2} - 14u_{n+1} + 8u_n$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

Pour tout n, $\quad X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{pmatrix}}_{\text{notée } A} X_n$

par récurrence, $\quad X_n = A^n X_0$

On a : $\quad \chi_A(X) = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$

pol caract. d'une matrice compagnon.

On cherche des racines parmi les diviseurs de -8

$$= (X-1)(X-2)(X-4)$$

scindé simple donc A diagonalisable.

Donc $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq $\quad A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

Oh! $\quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = \ldots \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad\quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \longrightarrow X_n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta 2^n \\ \gamma 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha V_1 + \beta 2^n V_2 + \gamma 4^n V_3$$

$$= \begin{pmatrix} \heartsuit + \spadesuit 2^n + \diamondsuit 4^n \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Donc $\exists A, B, C$ tq $\forall n \quad u_n = A + B 2^n + C 4^n$

avec A, B, C tq $\quad u_0 = u_1 = u_2 = 1$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ A + 2B + 4C = 1 \\ A + 4B + 16C = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A + B + C = 1 & \\ B + 3C = 0 & L_2 - L_1 \\ 3B + 15C = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A + B + C = 1 & \\ B + 3C = 0 & \\ 6C = 0 & L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

Donc the $u_n = 1$

1.4.4 Systèmes différentiels

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

où les inconnues sont x et y, deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Posons $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

On veut résoudre $X'(t) = A X(t)$

où $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On réduit A

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= X^2 - 5X + 6$$

$$= (X-2)(X-3)$$

scindé simple

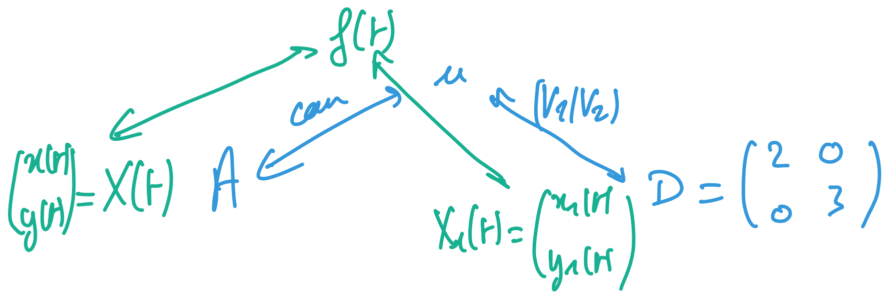
donc $\exists P = (V_1 | V_2)$ inversible tq $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

Recherche de $E_2(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \operatorname{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1}$$

$$E_3(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{V_2}$$



Par la formule de changement de base, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$

$$A = P D P^{-1}$$

$$X(t) = P X_1(t)$$

$$X'(t) = A X(t) \iff P X_1'(t) = P D P^{-1} P X_1(t)$$

$$\iff X_1'(t) = D X_1(t)$$

$$\iff \begin{cases} x_1'(t) = 2 x_1(t) \\ y_1'(t) = 3 y_1(t) \end{cases}$$

Chouette ! on a séparé les fct inconnues, c'est 2 EDL 1

$$\iff \exists \lambda, \mu \text{ t.q. } \forall t \begin{cases} x_1(t) = \lambda e^{2t} \\ y_1(t) = \mu e^{3t} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu$ tq $\forall t$ $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)$

$= P X_1(t)$

$= (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix}$

donc <u>les sol</u> :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lambda e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} + \mu e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{V_2}$$