Pour moi : 103.1 / 103.9

Réduction en dimension finie

Pour bien démarrer

1. Comment définir « valeur propre » ? « vecteur propre » ?
2. Que dire des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes ?
3. Que dire de la dimension d'un sous-espace propre ?
4. Qu'est-ce qu'un polynôme annulateur d'un endomorphisme ?
5. Quelle relation entre le spectre et les racines d'un polynôme annulateur ?
6. Énoncer le théorème de la division euclidienne des polynômes.
7. Rappeler la formule de changement de base.

(1) Contexte $u : E \to E$

λ vp de u $\iff \exists x \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$

$\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0_E\}$

x vecteur propre de u $\iff$ (Vect(x) stable par u)

$\iff \begin{cases} \exists \lambda \text{ tq } u(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases}$

(2) Si les λ_i sont 2 à 2 distincts

les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe

③ $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$ si λ vp de u

④ $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 Id_E$$

$$\forall x \in E \quad \underbrace{P(u)(x)}_{= 0_E} = a_n u^n(x) + \dots + a_0 x$$

⑤ Si P annule u, $Sp(u) \subset \{$racines de $P\}$

⑥ Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ (div eucl de A par B)

$\exists!\ (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

⑦

$$\begin{tikzcd} & u \in \mathcal{L}(E) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{B}'"] & \\ A & & A' \end{tikzcd}$$

$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

$A' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$

On note $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c c} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Par changement de base, $\boxed{A = P A' P^{-1}}$

$$\begin{tikzcd} & x \in E \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{B}'"] & \\ X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & & X' \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Par changement de base $\boxed{X = P X'}$

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Diagonalisation

1.1 Endomorphismes diagonalisables, matrices carrées diagonalisables

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale}$$

Remarque. *Une telle base est appelé **base de diagonalisation** de u. On dit aussi que u est **diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$**.*
En cas de diagonalisabilité, les termes diagonaux de la matrices sont les valeurs propres de u, et les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres associés.

Remarque. *Diagonaliser un endomorphisme u, c'est déterminer une base de vecteurs propres et exprimer la matrice (diagonale) représentant u dans cette base.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$\forall k \quad u(e_k) = \lambda_k e_k$ donc $\mathcal{B}$ est une base formée de vecteurs propres de u.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque.

Diagonaliser une matrice A, c'est déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} & u \in \mathcal{L}(E) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{B}' \text{ base de vecteurs propres}"] & \\ A & & D \text{ diagonale} \end{tikzcd}$$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable

(ii) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u

(iii) E est la somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Exemple. Les projecteurs, les symétries sont diagonalisables.

Preuve : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) par la prop. précédente

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose qu'il existe $\mathcal{B}$ base de E formée de vecteurs propres de u.

Mque $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

* On sait déjà que la somme est directe.

* $\boxed{\supset}$ toujours vraie

* $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$

Par l'hypothèse, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tq

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

où les e_k sont vecteurs propres de u.

On regroupe les $\alpha_k e_k$ qui sont dans le même espace propre $E_\lambda(u)$

$$x = \overbrace{\left(\alpha_{i_1} e_{i_1} + \alpha_{i_2} e_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_p} e_{i_p}\right)}^{\in E_{\lambda_1}(u)}$$
$$+ \underbrace{\left(\alpha_{j_1} e_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_q} e_{j_q}\right)}_{E_{\lambda_2}(u)}$$
$$+ \cdots$$
$$\in E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u) + \cdots$$

<u>(iii) ⇒ (ii)</u>

On suppose $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

Pour chaque $\lambda \in Sp(u)$, on considère $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$, qui est formée de vecteurs propres associés à la vp λ.

<u>Alors</u> par concaténation de base
$\underset{\lambda \in Sp(u)}{\boxed{\text{Concat}}} \mathcal{B}_\lambda$ est une base de E

On a trouvé une base de E formée de vecteurs propres de u.

<u>Exemple</u>. Soit p projecteur de E

On a $E = \underbrace{\mathrm{Ker}(p - Id_E)}_{\mathrm{Im}(p)} \oplus \mathrm{Ker}(p)$

donc $E = E_1(p) \oplus E_0(p)$

donc p est diagonalisable.

1.2 Caractérisation par les sous-espaces propres

Théorème.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable

donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

et donc $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

On sait que les $E_\lambda(u)$ sont en somme directe

et $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \subset E$

de dim $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$

d'où l'égalité : $\bigoplus E_\lambda(u) = E$

donc u diagonalisable

Proposition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque. *Il s'agit bien d'une condition nécessaire de diagonalisabilité, et elle est toujours satisfaite lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

scindé ? χ_u est de degré n

dire qu'il est scindé, c'est dire qu'il a n racines dans $\mathbb{K}$ (comptés avec multiplicité ie répétés autant de fois que leur multiplicité)

On a car : $\sum_{\lambda \text{ racine de } \chi_u} m(\lambda) = n$

Preuve : $\forall \lambda \in Sp(u)$

$\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$

donc $\underbrace{\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)}_{= n} \leq \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda)$

$\leq n = \deg \chi_u$

donc χ_u est scindé.

Théorème.

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est digonalisable si et seulement si :

- son polynôme caractéristique est scindé
- la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ χ_u est scindé donc $\sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda) = \deg \chi_u$

$= n$

or $\forall \lambda$, $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$ par hyp

donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = n$

donc u diagonalisable

$\boxed{\Rightarrow}$ $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \left(m(\lambda) - \dim E_\lambda(u) \right)$

$$= \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda) - \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$$

$$= \underset{\text{car } \chi_u \text{ scindé}}{n} - \underset{u \text{ diagonalisable}}{n}$$

$$= 0$$

Somme nulle de termes positifs

donc $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$

On a déjà justifié que χ_u est scindé.

CS **Corollaire.** Dans E de dimension n, si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarque. *Résultat analogue pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Remarque. *Ce corollaire donne bien une condition suffisante, mais non nécessaire, de diagonalisabilité. Dans ce cas, χ_u est scindé à racines simples.*

Si χ_u est scindé à racines simples

alors u diagonalisable

Preuve: $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \underbrace{m(\lambda)}_{=1}$

donc $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(u)$

Exemple. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle qu'on a calculé les polynômes caractéristiques au chapitre précédent :

$$\chi_A(X) = X(X^2-3) \qquad \chi_B(X) = (X-3)(X-1)^2 \qquad \chi_C(X) = (X-2)^3$$
$$\chi_D(X) = (X+4)(X-2)^2 \qquad \chi_E(X) = (X+1)(X-1)^2 \qquad \chi_F(X) = X^3-1$$

- $\chi_A = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$ scindé simple donc A diagonalisable
- $\chi_B = (X-3)(X-1)^2$ scindé

  $1 \leq \dim E_3(B) \leq 1$

  $1 \leq \dim E_1(B) \leq 2$

  Avec $E_1(B) = \mathrm{Ker}\,(B - 1 I_3)$

  $= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  matrice de rang 2 (C_1, C_2) libre

  donc $\dim E_1(B) = 1 \neq m(1)$

  donc B n'est pas diagonalisable

- $\chi_C\,(X-2)^3$

  $E_2(C) = \mathrm{Ker}\,(C - 2I_3)$

  $= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

  matrice de rang 2 car (C_1, C_3) libre donc $\dim E_2(C) = 1 < 3 = m(2)$

donc C n'est pas diagonalisable

__Remarque:__ Quand il n'y a qu'une seule vp, ici 2

Si C est diagonalisable, $E_2(C) = \mathbb{R}^3$

donc $\operatorname{Ker}(C - 2I_3) = \mathbb{R}^3$

ie $C = 2I_3$ or ce n'est pas le cas.

Les endomorphismes (matrices) diagonalisables qui n'ont qu'une vp

$\underbrace{\text{sont}}$ les homothéties λI_n

équivalence

- $\chi_D = (X+4)(X-2)^2$ scindé

  -4 vp simple
  2 vp double

  $*$ $\dim E_{-4}(D) = 1$

  $*$ $1 \leq \dim E_2(D) \leq 2$

  et $E_2(D) = \operatorname{Ker}(D - 2I_3)$

  $$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

  $C_1 = C_2$ et $C_1 + C_3 = 0$ donc cette matrice est de rang 1

  donc $\dim E_2(D) = 2 = m(2)$

* En conclusion : D est diagonalisable

- $\chi_E = (X+1)(X-1)^2$ scindé

  * $E_1(E) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

    $C_2 = 2C_3$ et $C_1 = 0$

    donc cette matrice est de rang 1

    donc $\dim E_1(E) = 2 = m(1)$

  * -1 racine simple donc $\dim E_{-1}(E) = m(-1)$

  Ainsi E est diagonalisable

- $\chi_F = X^3 - 1$ $\quad$ $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

  $= (X-1)(X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

  n'est pas scindé.

  donc F n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- $\chi_F = X^3 - 1$ $\quad$ $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

  $= (X-1)(X-j)(X-j^2)$ dans $\mathbb{C}[X]$

  est scindé simple

  donc F est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1.3 Une condition suffisante de diagonalisabilité

Une conséquence du théorème spectral, qui sera étudié au chapitre 105, est le résultat suivant :

Théorème.

> Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$