Pour lu : 204.17, 204.18 DS

3 Fonctions à valeurs dans un e.v.n. : limite et continuité en un point

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des e.v.n. sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble quelconque, non vide.

3.1 Limite d'une fonction en un point

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction et $a \in E$. On dit que f **a une limite en** a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in A,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

$d(x,a) \leq \eta \Rightarrow d(f(x),\ell) \leq \varepsilon$

Remarque. *Pour que cette définition ait un sens, il faut que a soit dans A ou au bord de A. On dira que a est adhérent à A.*

Proposition. En cas d'existence, ℓ est unique et s'appelle **la limite de f en a**. On note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Remarque. *On trouve aussi la notation $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ que l'on évitera d'utiliser.*

Il est immédiat que :

Proposition. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $\|f(x)-\ell\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Pour montrer que $f(x) \to \ell$, on cherche donc à majorer $\|f(x)-\ell\|$.

concern les suites

Théorème (caractérisation séquentielle).

> Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, et $a \in E$ un point adhérent à A.
> La fonction f admet une limite en a, notée ℓ, si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_n$ est convergente.
> Dans ce cas, les suites $(f(u_n))_n$ ont toutes pour limite ℓ.

Corollaire. S'il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ d'éléments de A qui convergent vers a, et telles que les suites $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ convergent vers des valeurs distinctes, alors f n'a pas de limite en a.

Théorème : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \left|\begin{array}{l} \forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \text{ tq } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ \text{on a } f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{array}\right.$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Bien vu ! C'est une composition de limite

On suppose $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

On considère $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} a$

Mque $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ en revenant à la déf.

Soit $\varepsilon > 0$

On applique la déf de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ avec ce ε

d'où $\eta > 0$ tq $\forall x \in E$ $\|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$

On applique la déf de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ avec η

d'où $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\|u_n - a\| \leq \eta$

Ainsi $\forall n \geq n_0$, on a donc $\|u_n - a\| \leq \eta$

et donc $\|f(u_n) - \ell\| \leq \varepsilon$

Bref : $f(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

$\boxed{\Leftarrow}$ C'est la non-récip.

Par contraposée.

On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\not\longrightarrow} \ell$

ie NON $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \ \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon\right)$

ie $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \eta > 0$ $\exists x$ tq $\|x - a\| \leq \eta$ et $\|f(x) - \ell\| > \varepsilon$

Mque :

NON $\left(\forall (u_n)_n \text{ tq } u_n \xrightarrow[+\infty]{} a, \text{ on a } f(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell\right)$

ie $\exists (u_n)_n$ tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ et $f(u_n) \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} \ell$

On applique l'hyp avec $\eta = \frac{1}{n}$

d'où l'existence d'un x, noté u_n, tq $\|u_n - a\| \leq \frac{1}{n}$

et $\|f(u_n) - \ell\| > \varepsilon$

On a donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ car $\frac{1}{n} \to 0$

et $f(u_n) \not\xrightarrow[+\infty]{} \ell$ car $\|f(u_n) - \ell\| > \varepsilon > 0$

3.2 Indépendance au choix de la norme

A priori, la définition de l'existence de la limite d'une fonction et la valeur de cette limite dépendent du choix de la norme.

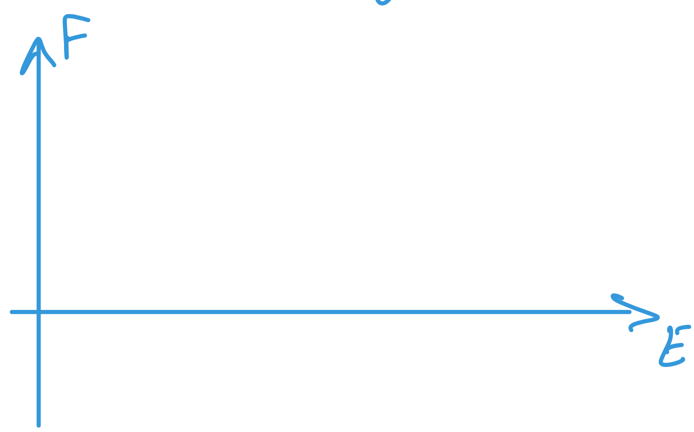
Théorème.

> Dans un e.v.n. de dimension finie, l'existence de la limite d'une fonction et la valeur de cette limite sont indépendantes du choix de la norme.

Remarque. *On peut aussi remplacer une norme par une autre norme qui lui est équivalente, sans changer l'existence et la valeur de la limite d'une fonction.*

on prend la preuve.

<u>Repr graphique</u> $f : E \to F$ $\to$ graphe



3.3 Fonctions bornées

Remarque. *L'ensemble des fonctions : $X \to E$, noté $\mathcal{F}(X, E) = E^X$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel.*

Définition. Une fonction : $X \to E$ est dite **bornée** si et seulement si l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in E \text{ t.q. } \exists x \in X,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x),\ x \in X\} \end{aligned}$$

est une partie bornée de E.

Remarque. *Cela signifie qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :*

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M$$

Proposition. Si f a une limite (finie) en a, alors f est bornée au voisinage de a.

3.4 Opérations algébriques sur les limites, composition

Proposition. Soit f et g deux fonctions $A \subset E \to F$, λ, μ deux scalaires. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$, alors $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \ell + \mu \ell'$$

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction scalaire. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \phi$. Alors φf admet une limite en a et :

$$(\varphi f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \phi \ell$$

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$. On suppose que $f(A) \subset B$ pour pouvoir envisager $g \circ f : A \subset E \to G$.
Soit a un point ad~~hé~~rent à A. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, alors b est ad~~hé~~rent à B. Et si de plus $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} c$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

3.5 Limite par coordonnées

Définition. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F et $f : A \subset E \to F$. Pour tout $x \in A$, $f(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$f(x) = f_1(x)e'_1 + \cdots + f_p(x)e'_p = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)e'_i$$

On définit ainsi p **fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$** $f_i : A \subset E \to \mathbb{K}$.

Proposition. Avec les notations de la définition, pour a adhérent à A, f a une limite en a si et seulement si chaque fonction coordonnée a une limite en a.

Dans ce cas, en notant $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et, pour tout i, $f_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_i$, on a :

$$\ell = \ell_1 e'_1 + \cdots + \ell_p e'_p$$

$f : E \longrightarrow F$ de base $(e'_1, \dots, e'_p)$

$x \longmapsto f(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$

On définit p fct : $f_i : E \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$x \longmapsto f_i(x)$

3.6 Continuité en un point

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et a un point de A. On dit que f est **continue en** a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Remarque.

- *On définit parfois simplement que « f est continue en a » par « f a une limite en a », car cette limite ne peut être que $f(a)$ en un point où f est définie.*
- *Le point de vue développé ici est local. Seul le comportement de f au voisinage de a peut influencer la continuité en a.*
- *Comme c'est un cas particulier de limite, toutes les propositions du paragraphe précédent se transposent en termes de continuité : caractérisation séquentielle, caractère localement borné, combinaison linéaire, multiplication par une fonction scalaire, composition, lien avec les fonctions coordonnées.*

Formalisons néanmoins les deux dernières propositions :

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$. On suppose que $f(A) \subset B$ pour pouvoir envisager $g \circ f : A \subset E \to G$.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition. On reprend les notations du § 3.5. f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i est continue en a.

~~Th des V.I~~ Th des bornes atteintes

4 Fonctions à valeurs dans un e.v.n. : continuité sur une partie

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des e.v.n. sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble quelconque, non vide.

4.1 Généralités

Définition. Une fonction $f : A \subset E \to F$ est dite **continue sur** A si et seulement si elle est continue en tout point de A.

On note $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A, à valeurs dans F.

Remarque.

- *Comme la continuité sur un ensemble est la continuité en chaque point de cet ensemble, la plupart des propositions du paragraphe précédent se transposent en termes de continuité sur un ensemble : combinaison linéaire, multiplication par une fonction scalaire continue, composition, lien avec les fonctions coordonnées.*
- $\mathcal{C}^0(A, F)$ *est un espace vectoriel.*
- *On verra que l'aspect global de la continuité permet d'obtenir d'autres types de résultats.*

4.2 Fonctions lipschitziennes

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que f est **lipschitzienne** si et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\|y - x\|_E$$

Pour un k convenant, on dit que f est k-lipschitzienne.

Exemple. $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

Remarque. *L'inégalité des accroissements finis permet de justifier qu'une fonction* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est lipschitzienne sur tout segment.*

Proposition. La composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

Proposition. Toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

Exemple. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et n'y est pourtant pas lipschitzienne.

Soit f une fct $E \longrightarrow F$ k-lipschitzienne

g $F \longrightarrow G$ l-lipschitzienne

Alors $g \circ f : E \longrightarrow F \longrightarrow G$

$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$

Pour $x, y \in E$ on a :

$$\| g(f(x)) - g(f(y)) \|_G$$

$\leq l \, \| f(x) - f(y) \|_F$ car g est l-lips.

$\leq l.k \, \| x - y \|_E$ car f est k-lip.

donc $g \circ f$ est $k \times \ell$ lipschitzienne.

<u>Prop</u> : Si f est lipschitzienne, alors f est continue

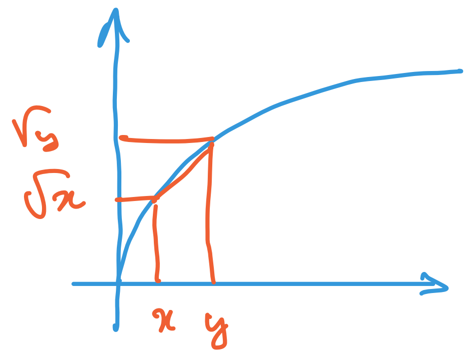
<u>Preuve</u> : Soit f k-lipschitzienne sur A

$a \in A$

Alors $\forall x \in A \quad \|f(x) - f(a)\| \leq k \|x - a\| \xrightarrow[x \to a]{} 0$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

<u>Exemple</u> : $\sqrt{\ } : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ n'est pas lipschitzienne



$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

donc $\dfrac{|\sqrt{y} - \sqrt{x}|}{|y - x|} = \dfrac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$

non borné sur $\mathbb{R}_+^2$

(en prenant x et y petits)

4.3 Fonctions automatiquement continues

4.3.1 Applications linéaires

Remarque. *Pour une application linéaire, étudier la continuité en a revient à l'étudier en* 0.

Théorème. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E de dim finie $\qquad E, F$ ev.n

~~En dimension finie~~, toute application linéaire est continue.

Proposition. Mieux : en dimension finie, toute application linéaire est lipschitzienne.

Exemple. La trace, la transposition sont des applications continues.

Preuve:

Soit E, F deux ev. normés

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \qquad f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

On suppose E de dim finie p

On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

On munit E de $\|.\|_\infty$

où $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{p} |x_i|$ lorsque $x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

F est muni de $\|.\|$.

- $\|f(x)\| = \|f(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i)\|$ pour $x \in E$

$$= \|\sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i)\| \qquad \text{par linéarité}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, \|f(e_i)\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty \, \|f(e_i)\|$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\| \right)}_{\text{noté } k} \|x\|_\infty$$

indép de x

• Pour $x, y \in E$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \quad \text{par linéarité}$$
$$\leq k \|x-y\|_\infty \quad \text{par } 1^{er} \text{ point}$$

donc f est k-lipschitzienne donc continue.

<u>Exemple</u>: $tr : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

<u>Remarque</u> Ah ah!

Si f est linéaire

f lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists k \text{ tq } \forall x \; \|f(x)\| \leq k\|x\|$

$$\left(E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \qquad \|f\|_\infty = \sup_{\cancel{x}t \in X} |f(\cancel{x}t)| \right)$$

pas de x

4.3.2 Applications polynomiales

Définition. Dans un espace vectoriel muni d'un produit, on peut définir les applications polynomiales. Ce sont les applications dont les fonctions coordonnées sont des combinaisons linéaires de produits de puissances des coordonnées des variables.

Résultat.

En dimension finie, toute application polynomiale est continue.

4.3.3 Applications multilinéaires, déterminant

Résultat.

> En dimension finie, toute application multilinéaire est continue.

Exemple.

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$ est continue.
- Dans E espace euclidien, le produit scalaire est continu.
- L'application déterminant est continue.

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$