Pour je : 204.7, 204.20, 204.23

2.2 Suites bornées

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

Théorème.

Toute suite convergente est bornée.

Preuve :

On applique la déf de $u_n \xrightarrow[+\infty]{} l$ avec $\varepsilon = 1$

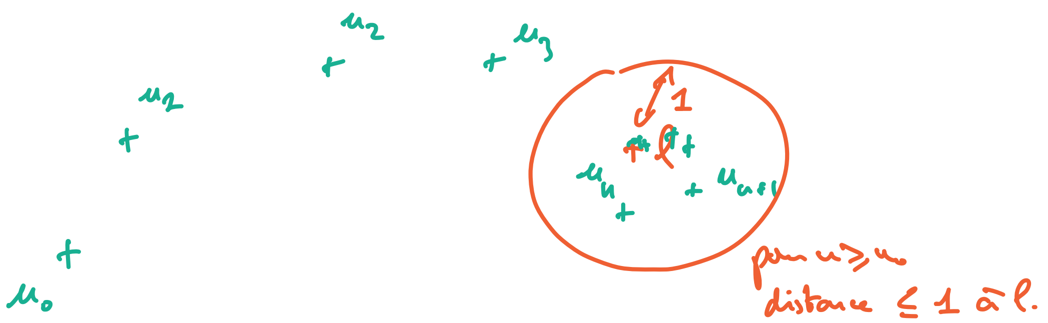
d'où $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \quad \|u_n - l\| \leq 1$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad \|u_n\| &= \|u_n - l + l\| \\ &\leq \|u_n - l\| + \|l\| \\ &\leq 1 + \|l\| \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq \underbrace{\max\left(\|u_0\|, \|u_1\|, \dots, \|u_{n_0-1}\|, 1+\|l\|\right)}_{\text{indép de } n}$

donc $(u_n)_n$ est bornée.



Proposition. Une partie A de E n'est pas bornée si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que :

$$\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

preuve : immédiat

2.3 Indépendance au choix de la norme

A priori, la définition de la convergence et la valeur de la limite dépendent du choix de la norme. De même, le caractère borné de la suite dépend du choix de la norme.

Théorème.

> La convergence d'une suite et la valeur de sa limite (resp. son caractère borné) sont invariants par changement de norme en une norme équivalente.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Il nous permet, en dimension finie, de choisir une norme adaptée au problème, qui engendre moins de calculs.*

Preuve : On considère N_1 et N_2 deux normes équivalentes,

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tq } \forall x \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Soit $(u_n)_n$ suite de E

On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad N_1(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

Mque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad N_2(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

On applique la déf de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$ avec $\frac{\varepsilon}{\beta} > 0$

D'où l'existence de n_0 tq $\forall n \geq n_0 \quad N_1(u_n - \ell) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$

Alors $\forall n \geq n_0 \quad N_2(u_n - \ell) \leq \beta N_1(u_n - \ell)$

$\leq \varepsilon$ Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$

Rôle symétrique de N_1, N_2.

2.4 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.

La réciproque est bien sûr fausse.

en revenant à la déf.

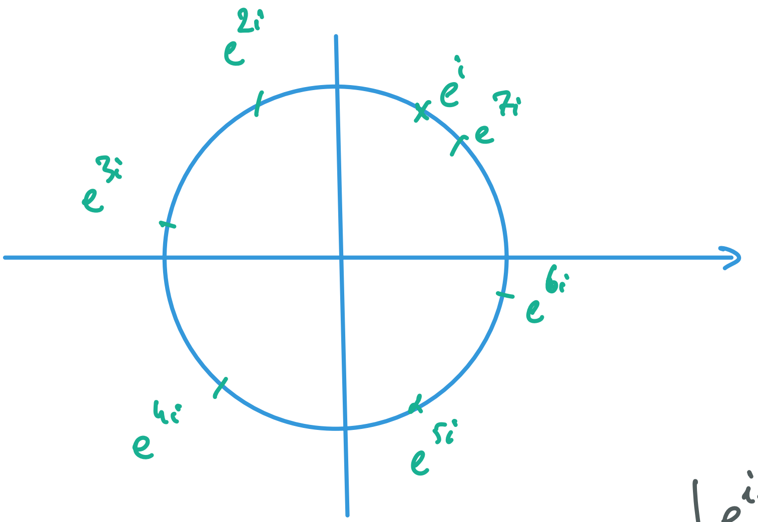
$$\big|\, \|u_n\| - \|\ell\| \,\big| \leq \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Avoir en tête $\left(e^{in\frac{\pi}{3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

où $\mathbb{C}$ ev. normé, de norme $|\cdot|$

$$\left|e^{in\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

pourtant $\left(e^{in\frac{\pi}{3}}\right)_n$ diverge



$$|e^{in} - \ell|$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ signifie distance$(u_n, \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\text{distance}(u_n,\ell) = \|u_n - \ell\|$$

2.5 Suites extraites

Soit $(u_n)_n$ suite

$$(u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7,\ \dots$$

$$\begin{array}{cccc} (u_0, & u_2, & u_5, & u_6, \ \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3, \ \dots \end{array}$$

C'est une suite notée $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ p & \longmapsto & \varphi(p) \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 6 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\varphi(p)$ = le numéro de l'indice p que l'on garde dans (u_n)

la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est $(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une **suite extraite** de $(u_n)_n$ est une suite de la forme :

$$(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque. *L'application φ s'appelle une **extractrice**.*

Exemple. On utilise souvent les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. On peut rencontrer $(u_{3n})_n$ ou $(u_{n^2})_n$ ou d'autres suites extraites plus abstraites.

$(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de $(u_n)_n$ où $\varphi : p \mapsto 2p$

Théorème.

> Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite.

Corollaire. S'il existe deux suites extraites de $(u_n)_n$ qui convergent vers des limites distinctes, alors $(u_n)_n$ est une suite divergente.

Preuve: On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

On considère φ extractrice

Mq que $(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12} \dots)$

proche de ℓ

$(u_{\varphi(p)})$ $(u_0, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{11} \dots)$

proche de ℓ

Soit $\varepsilon > 0$ On cherche p_0 tq $\forall p \geq p_0$ $\|u_{\varphi(p)} - \ell\| \leq \varepsilon$

Parenthèse Ah Tiens! Comme φ extractrice, $\forall n$ $\varphi(n) \geq n$

Par récurrence:
- $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$
- On suppose $\varphi(n) \geq n$

φ est st $\nearrow$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$

donc $\varphi(n+1) > n$

or $\varphi(n+1)$ entier donc $\varphi(n+1) \geq n+1$

Refermons la parenthèse

On applique la déf de $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ avec ε

D'où $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$

Alors : $\forall p \geqslant n_0$, on a $\varphi(p) \geqslant p \geqslant n_0$

donc $\|u_{\varphi(p)} - \ell\| \leq \varepsilon$

On a montré que $(u_{\varphi(p)})_p$ cv vers ℓ

Théorème.

Si les deux suites extraites des termes d'indices pairs $(u_{2p})_p$ et impairs $(u_{2p+1})_p$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ est convergente, de limite ℓ.

Remarque. *Ce résultat ne se généralise pas à « quelques suites extraites convergentes ». Il faut bien sûr que les limites soient les mêmes.*

preuve :

$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots)$

$(u_0, u_2, u_4, u_6, u_8 \dots$ ← proches de ℓ

$(u_1, u_3, u_5, u_7, \dots$ ← proche de ℓ

Soit $\varepsilon > 0$

On applique la déf de $u_{2p} \to \ell$ et $u_{2p+1} \to \ell$ avec ce ε.

d'où P_1, P_2 tq $\forall p \geqslant P_1 \quad \|u_{2p} - \ell\| \leq \varepsilon$

$\forall p \geqslant P_2 \quad \|u_{2p+1} - \ell\| \leq \varepsilon$

Posons $N = \mathrm{Max}(2P_1, 2P_2 + 1)$

Soit $n \geqslant N$

1er cas : si n pair, $n=2p$ avec $n \geqslant N \geqslant 2p_1$

donc $p \geqslant p_1$

donc $\|u_{2p}-\ell\| \leq \varepsilon$ ie $\|u_n-\ell\| \leq \varepsilon$

2e cas : si n impair, $n=2p+1$ où $n \geqslant N \geqslant 2p_2+1$

donc $p \geqslant p_2$

donc $\|u_{2p+1}-\ell\| \leq \varepsilon$ ie $\|u_n-\ell\| \leq \varepsilon$

Bref : pour tout $n \geqslant N$, $\|u_n-\ell\| \leq \varepsilon$

CCl : $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

2.6 Convergence par coordonnées

On suppose ici que E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le p-uplet des coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la k**-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout k, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

Preuve : On munit E d'une norme (celle qu'on veut puisque E est de dim finie)

Pour x de coord $(x_1, .., x_p)$ dans $\mathcal{B}$,

on note $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1}^{p} (|x_k|)$

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ Mq $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^k$

$|u_n^k - \ell^k| \leq \|u_n - \ell\|_\infty$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^k$

Mq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

On revient à la définition.

Soit $\varepsilon > 0$

On applique la déf de $u_n^k \xrightarrow[+\infty]{} \ell^k$ avec ce ε

d'où un rang N_k tq $\forall n \geqslant N_k \quad |u_n^k - \ell^k| \leq \varepsilon$

Notons $N = \underset{k=1}{\overset{p}{\operatorname{Max}}} (N_k)$

Pour $n \geqslant N$,

$\forall k$ on a $n \geqslant N_k \qquad |u_n^k - \ell^k| \leq \varepsilon$

majorant indép de k

donc $\underset{k=1}{\overset{p}{\operatorname{Max}}} |u_n^k - \ell^k| \leq \varepsilon$

ie $\|u_n - \ell\|_\infty \leq \varepsilon$

Exemple. Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{n})^n & (1-\frac{1}{n})^{n^2} \\ (1-\frac{1}{n})^{\sqrt{n}} & (1+\frac{1}{n})^n \end{pmatrix}$$

$E = M_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique

A_n a pour coord $\Big(\underbrace{(1-\frac{1}{n})^n}_{x_n}, \underbrace{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}_{y_n}, \underbrace{(1-\frac{1}{n})^{\sqrt{n}}}_{z_n}, \underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{t_n} \Big)$

- $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$= e^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$$

$$= e^{n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))}$$

$$= e^{-1+o(1)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$$

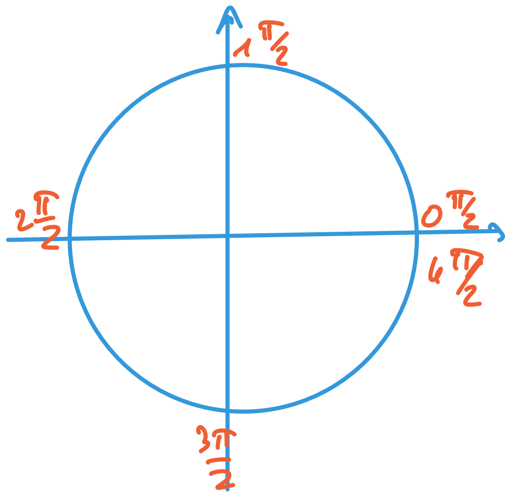
- $y_n = [\,\dots\,] \longrightarrow 0$
- $z_n = [\,\dots\,) \longrightarrow 1$
- $t_n = [\,\dots\,) \longrightarrow e$

Donc $\quad A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix}$

$$\left\| A_n - \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix} \right\| \longrightarrow 0$$

Exemple. La suite $(\cos n\frac{\pi}{2})_n$ est-elle convergente ? Et $(\sin n)_n$?

On note $u_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$



$$u_{4p} = \cos(2p\pi) = 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$$

$$u_{4p+1} = \cos(2p\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

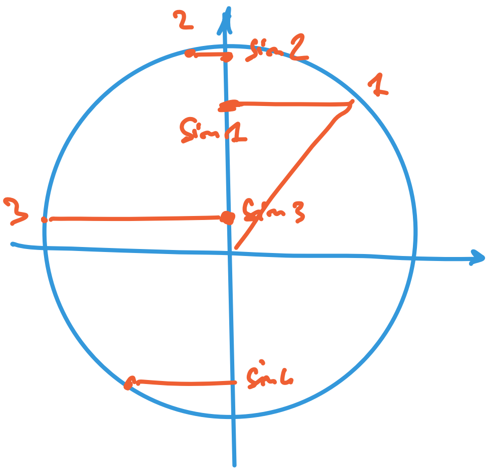
donc $(u_n)_n$ diverge.

On note

$(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

$u_n = \sin n$

$\cancel{(u_{2\pi p})_p}$ $\quad$ $\cancel{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ p \mapsto 2\pi p}$



On raisonne par l'absurde. On note $\begin{cases} x_n = \cos n \\ y_n = \sin n \end{cases}$

On suppose $(y_n)_n$ converge (on note β sa limite)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos 1\, x_n - \sin 1\, y_n \\ y_{n+1} = \sin 1\, x_n + \cos 1\, y_n \end{cases}$$

$\sin 1\,(L_1) - \cos 1\,(L_2)$ + glissement d'indice

$\forall n \geq 1 \qquad \sin 1\, x_n = \cos 1\, y_n - \sin^2 1\, y_{n-1} - \cos^2 1\, y_{n-1}$

ie $\qquad x_n = \dfrac{1}{\tan 1} y_n - \dfrac{1}{\sin 1} y_{n-1}$

donc $(x_n)_n$ converge $\left(\text{vers } \frac{1}{\tan 1}\beta - \frac{\beta}{\sin 1}\right)$

on note α sa limite

On a: $x_n \xrightarrow[+\infty]{} \alpha$, $y_n \xrightarrow[+\infty]{} \beta$

$\forall n$ $\begin{cases} x_{n+1} = \cos 1 \, x_n - \sin 1 \, y_n \\ y_{n+1} = \sin 1 \, x_n + \cos 1 \, y_n \end{cases}$

donc par passage à la limite

$$\begin{cases} \alpha = \cos 1 \, \alpha - \sin 1 \, \beta \\ \beta = \sin 1 \, \alpha + \cos 1 \, \beta \end{cases}$$

ie (α, β) sol de $\begin{cases} (\cos 1 - 1)\alpha - \sin 1 \, \beta = 0 \\ \sin 1 \, \alpha + (\cos 1 - 1)\beta = 0 \end{cases}$

Syst linéaire homogène de déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos 1 - 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos 1 - 1)^2 + \sin^2 1$$

$$= 2(1 - \cos 1)$$

$$\neq 0$$

donc le système admet une unique solution, qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

Or $\forall n$ $x_n^2 + y_n^2 = 1$

donc par passage à limite, $0^2 + 0^2 = 1$

contradiction.