Pour ma : 102.24, 102.19, 204.1 + DM

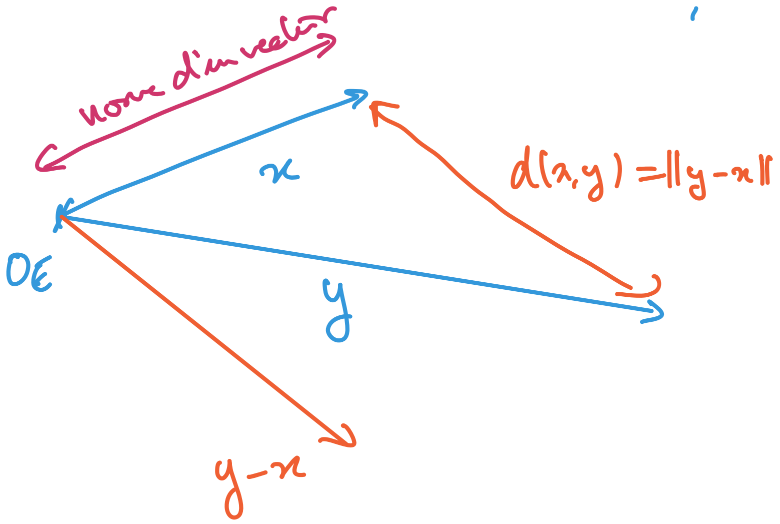
Analyse

Normes, espaces vectoriels normés

$E = \mathbb{R}[x]$

$E = \mathcal{L}(F)$

$\vdots$



1 Normes

1.1 Définitions

Définition. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme sur** E si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- *On abrègera dans le cours « espace vectoriel normé » par « e.v.n. »*
- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé e.v.n.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur* ***unitaire***.

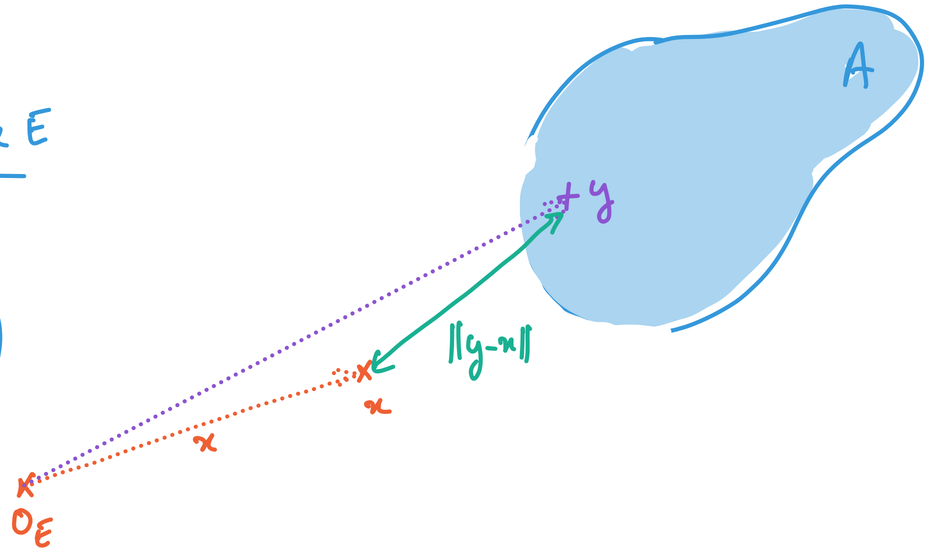
Définition. On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|y-x\| \end{array}$$

distance à une partie de E

Soit $A \subset E$

$$d(x,A) = \underset{y \in A}{\mathrm{Inf}} \left(\|y-x\| \right)$$



Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $\|0_E\| = 0$ $\qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$ $\quad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\|$ $\quad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$

inégalité triangulaire inversée. Bof. Inutile.

Preuve: • $\|0_E\| = \|0_K \cdot 0_E\|$

$= |0_K| . \|0_E\|$

$= 0_K$

• $\|x\| = \|x - y + y\|$

$\leqslant \|x-y\| + \|y\|$

donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$

de même [...]

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $d(x, y) \geqslant 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) = 0 \implies x = y$
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme sur E induit une norme sur F.

1.2 Normes usuelles

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve

Rappelons que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique positive, définie-positive

- $\rightarrow$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- $\rightarrow$ linéaire par rapport à ses 2 variables
- $\rightarrow$ $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\rightarrow$ $\langle x, x \rangle \geq 0$ $(**)$
- $\rightarrow$ $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$ $(*)$

Mque $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E

- C'est bien défini ($\|x\|$ existe) car $\langle x, x \rangle \geq 0$ cf $(**)$
- $\forall x \quad \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$
- On suppose $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$ alors $x = 0$ par $(*)$
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$

$$= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \qquad \text{bilinéarité.}$$
$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

par Cauchy-Schwarz

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

- $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle}$

$$= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$$= |\lambda| \; \|x\|$$

<u>Cauchy-Schwarz:</u>

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos(\widehat{x,y})$$

donc $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Définition. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie.**

Théorème.

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

$\mathbb{R}^3$

- $\|\cdot\|_2$

  $\|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

  norme euclidienne associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'+zz'$

- $\|\cdot\|_\infty$

  $\|(x,y,z)\|_\infty = \operatorname{Max}(|x|,|y|,|z|)$

Justifions que c'est une norme sur $\mathbb{K}^p$ $\qquad \operatorname*{Max}_{i=1} |x_i|$

- $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie (par un max)
- $\forall x \in \mathbb{K}^p$, $|x_1| \geqslant 0$ donc $\|x\|_\infty \geqslant |x_1| \geqslant 0$
- On suppose $\|x\|_\infty = 0$ ie $\operatorname*{Max}_{i=1} |x_i| = 0$

  $\forall i \quad 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0$

  donc $\forall i \ x_i = 0$ ie $x = 0_E$

- Soit $x,y \in \mathbb{K}^p$

  Mq $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

  On ne raisonne pas directement en Max ou sur un sup, on commence par majorer le "maxande" ou le "supande".

$$\forall i \in \{1,\dots,p\} \quad |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$$
$$\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

indép de i

donc $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

- Homogénéité

$$\|\lambda x\|_\infty = \operatorname{Max}_{i=1}^{p} (|\lambda|\,|x_i|)$$
$$= |\lambda| \, \|x\|_\infty$$

autorisé directement dans le programme

- $\|\cdot\|_1$

$$\|(x,y,z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

On peut montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ et } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E.

- $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$

définit une norme $\longrightarrow$ $\boxed{204.1}$

- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

* intégrale qui existe car f continue sur segment.
* positivité
* On suppose $\|f\|_1 = 0$ ie $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 0$

  intégrale nulle d'une fct continue positive

  donc $\forall t \in [0,1]$ $|f(t)| = 0$ ie $f(t) = 0$
* inég triangulaire [...]
* homogénéité [...]

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \underset{i \in \{0,\dots,n\}}{\text{Max}} |a_i|$$

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)|\,dt$$

Ce sont des normes sur E.

Exemple. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{ij}|, \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top M)}, \qquad \|M\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \cdot b_{ij}$$