Pour me : 102.2, 102.15, 102.9

2.4 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Théorème.

Les valeurs propres de u (resp. A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarque. *Le théorème précédent énonce bien une caractérisation.*

$Sp(u) = \{\text{racine de } \chi_u\}$

preuve : λ vp de A

$\iff A - \lambda I_n$ non inversible

$\iff \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{(-1)^n \chi_A(\lambda)} = 0$

$\iff \lambda$ racine de χ_A.

Détermination pratique des valeurs propres. Sur un exemple concret en dimension finie, on peut déterminer les valeurs propres d'une matrice en calculant, sous forme factorisée, son polynôme caractéristique.

Remarque. *Si une matrice est triangulaire ou diagonale, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, comptés avec multiplicité.*

Exemple $\boxed{102.7}$ $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ $Sp(A) = \{1, 2\}$

1 vp simple et 2 vp double

λ vp de u $\iff$ λ racine de χ_u

2.5 Multiplicité des valeurs propres

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et λ une valeur propre. On appelle **ordre de multiplicité** de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme χ_u (resp. χ_A).

Remarque. *Lorsque l'ordre de multiplicité est 1 (resp. 2), on dit que la valeur propre est simple (resp. double).*

dim finie n

Proposition. Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Preuve : χ_u est de degré n

donc a au plus n racines (avec mult)

P est scindé signifie qu'on peut le factoriser en produit de pol. de degré 1.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique est **scindé**. Alors A admet exactement n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, et on a :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Le résultat est encore valable pour $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Remarque. *Ce résultat s'applique toujours lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

χ_A est de degré n, supposé scindé, est unitaire donc :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$
$$= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_n)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les vp (répétées si multiple)

coeff cst de $\chi_A(X) = (-1)^n \lambda_1 \times \lambda_2 \ldots \times \lambda_n$

$= (-1)^n \det A$

donc $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$

(rel coeff racines $P = a_n X^n + \ldots + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$)

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$
$$= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_n)$$

coeff devant X^{n-1} dans χ_A

est $(-\lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_n)$

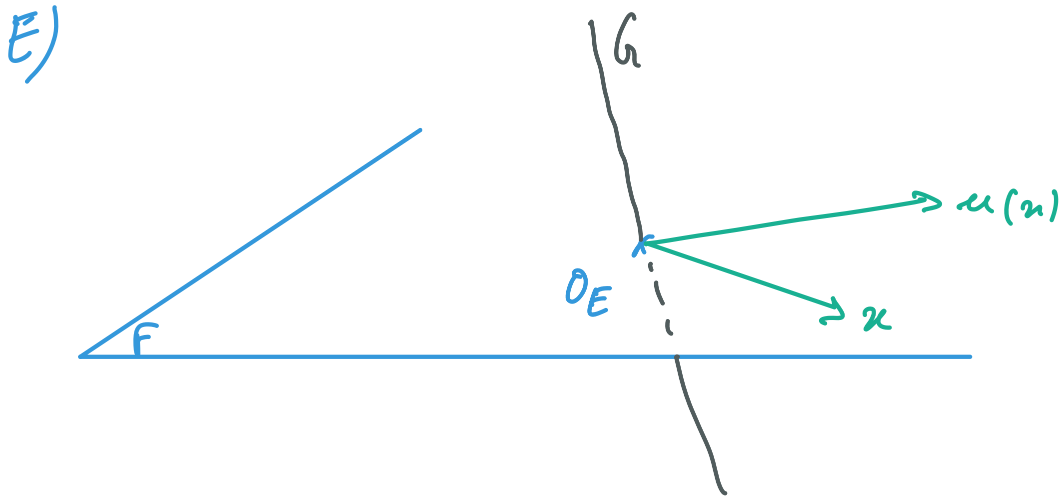
et c'est aussi $-\operatorname{tr} A$.

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A}$

Rmq : rel coeff racines $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

2.6 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors χ_{u_F} divise χ_u.



$$u : E \longrightarrow E \qquad u_F : F \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto u(x)$$

On a $\chi_{u_F}(X) \mid \chi_u(X)$

divise

?? $\chi_u(X) = \det(XI_n - A)$ où $A = \mathrm{mat}(u)$

$\chi_{u_F}(X) = \det(XI_p - B)$ $\quad B = \mathrm{Mat}(u_F)$

sous ev stable par u $\longrightarrow$ matrices par blocs.

Soit $\mathcal{B}$ base de E adaptée à F ie $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{E})$

où $\mathcal{B}_F$ base de F.

$$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} B & \cancel{C} \\ \hline 0 & \cancel{D} \end{array}\right)$$ car F stable par u

et $B = \mathrm{Mat}(u_F, \mathcal{B}_F)$

<u>Alors :</u> $\chi_u(X) = \chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

$$= \det \left(\begin{array}{c:c} XI_p - B & -* \\ \hdashline 0 & XI_{n-p} - * \end{array} \right)$$

matrice triang. par blocs

$$= \det(XI_p - B) \times \det(XI_{n-p} - *)$$

$$= \chi_B(X) \times \chi_*(X)$$

$$= \chi_{u_F}(X) \times \chi_*(X)$$

donc χ_{u_F} divise χ_u .

Théorème.

> La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :
> Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, en notant $m(\lambda)$ la multiplicité de λ, on a :
>
> $$1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m(\lambda)$$
>
> Le résultat est encore valable pour $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

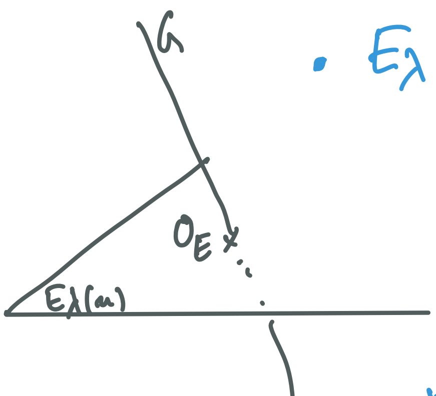
Preuve : Travaillons vectoriellement.

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A.

λ vp de u, de multiplicité $m(\lambda)$

$p = \dim E_\lambda(u)$

- on sait déjà que $1 \leq p$
- $E_\lambda(u)$ est stable par u donc par le lemme,



$$\chi_{u_{E_\lambda(u)}} \text{ divise } \chi_u$$

* l'endom. induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ.

Donc $\mathrm{Mat}\left(u_{E_\lambda(u)}, \text{base qcq}\right) = \lambda I_p$

donc $\chi_{u_{E_\lambda(u)}} = \det(X I_p - \lambda I_p)$

$\lambda I_p = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$

$= \det\left((X-\lambda) I_p\right)$

$= (X-\lambda)^p \; 1.$

$= (X-\lambda)^p$

$* \; \chi_u = (X-\lambda)^{m(\lambda)} Q(X)$

pol. dont λ n'est pas racine

<u>Ainsi</u> $(X-\lambda)^p \mid (X-\lambda)^{m(\lambda)} Q(X)$

donc $p \leq m(\lambda)$

<u>Exemple.</u> Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>On calcule:</u>

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -X+1 & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + C_1$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X-3 & -1 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2 (X-3) \qquad \text{dév } L_1$$

donc 1 vp double, 3 vp simple.

- <u>Recherche de $E_1(B)$</u> $\quad 1 \leq \dim E_1(B) \leq 2$

$$E_1(B) = \operatorname{Ker}(B - I_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C_1, C_2 libre donc cette matrice est de rang ≥ 2

donc $\dim E_1(B) \leq 1$ par le th du rang.

On remarque $C_1 = -C_2 + 2C_3$

donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in E_1(B)$ donc $E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

<u>Ici</u> : $\dim E_1(B) < m(1)$

<u>Recherche de $E_3(B)$</u>

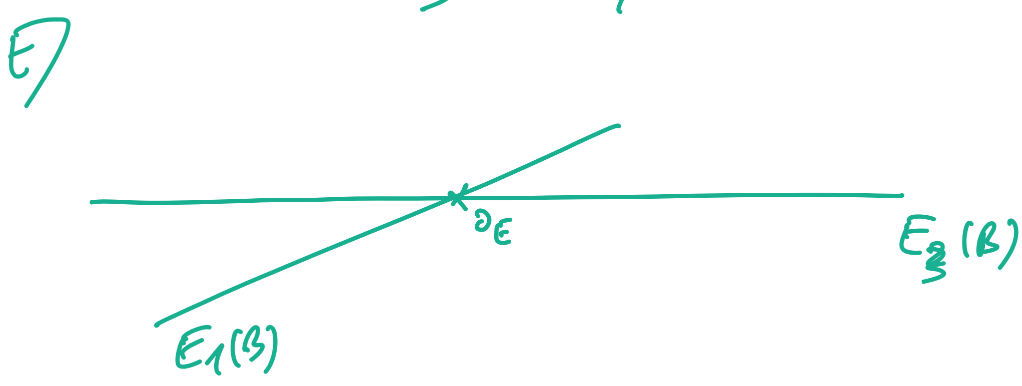
On a $1 \leq \dim E_3(B) \leq 1 = m(3)$

donc $E_3(B)$ est une droite vecto.

[...]

$E_3(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

<u>Remarque</u> : $E_1(B) \oplus E_3(B) \subsetneq E$



$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

On calcule: $$\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1\\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 1 & X-3\end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$= (X-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & X-2 & -2\\ 0 & 1 & X-3\end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$= (X-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & X-1 & -1\\ 0 & 1 & X-3\end{vmatrix}$$

$$= (X-2)(X^2-4X+4)$$

$$= (X-2)^3$$

donc $Sp(C) = \{2\}$ 2 vp triple

Rmq: $1 \leq \dim E_2(C) \leq 3$

est-ce que c'est 3 ?

NON sinon l'endom u associé à C

serait $2Id_E$ ie $C = 2I_3$

(ou encore: $rg(C-2I_3) = 0$

donc $C = 2I_3$)

Recherche de $E_2(C)$:

$$E_2(C) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 (car C_1, C_3 indép)

donc $\dim E_2(C) = 1$

Or $C_1 + C_2 = 0$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(C)$ donc $E_2(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$\overset{\text{dév } C_1}{=} X^3 - 1$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\underbrace{(X^2 + X + 1)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X]}$$

- $Sp_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$ 1 vp simple

On remarque que $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

donc $E_1(F) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ car sa dim est 1.

- Si on considère $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$\chi_F(X) = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$Sp_{\mathbb{C}}(F) = \{1, j, \bar{j}\}$

<u>Recherche de $E_j(F)$:</u>

. On sait que $\dim E_j(F) = 1$

. $E_j(F) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-j & 1 & 0\\ 0 & -j & 1\\ 1 & 0 & -j\end{pmatrix}$

Oh ! $C_1 + j\,C_2 = \begin{pmatrix}0\\-j^2\\1\end{pmatrix} = -j^2\begin{pmatrix}0\\1\\-j\end{pmatrix} = -j^2 C_3$

car $+j^3 = 1$

Donc $E_j(F) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$

<u>Recherche de $E_{j^2}(F)$</u> $\qquad j^2 = \bar{j}$

$$X \in E_{j^2}(F) \iff FX = j^2 X$$
$$\iff \overline{FX} = \overline{j^2 X}$$
$$\iff F\bar{X} = j\,\bar{X}$$

car $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$j^2 = \bar{j}$

$$\iff \bar{X} \in E_j(F)$$

donc $E_{j^2}(F) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$

$Sp(A) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

$Sp(D) = \{-4, 2\}$ $\quad$ (2 vp double) $\quad$ $E_2(B)$ de dim 2

$Sp(E) = \{-1, 1\}$ $\quad$ (1 vp double) $\quad$ $E_1(E)$ de dim 2