Pour jeu 203.33, 203.34, 203.37

4.1 Les séries de référence

Séries de Riemann.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge absolument si et seulement si } \alpha > 1.$$

Séries géométriques.

$$\sum a^n \text{ converge absolument si et seulement si } |a| < 1.$$

Remarque. *Les séries « exponentielles » sont des séries géométriques. Et donc :*

$\sum \mathrm{e}^{-\alpha n}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$.

Séries de Riemann alternées.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.$$

Remarque. *Attention ! Comme cette dernière série n'est pas de signe constant, on ne peut pas l'utiliser dans un raisonnement où l'on effectue une comparaison à une série convergente.*

La série exponentielle.

$$\sum \frac{x^n}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Convergence absolue par comparaison

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ cv absolument

  alors $\sum u_n$ cv absolument

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ cv absolument

  $u_n = O(v_n)$

  alors $\sum u_n$ cv absolument

- Si $|u_n| \leq |v_n|$ et $\sum v_n$ cv absolument

  alors $\sum u_n$ cv absolument

Divergence par comparaison

- Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ ne cv pas absolument

  alors $\sum u_n$ ne cv pas absolument

  si de plus u_n de signe cst au vois de $+\infty$

(par ex parce que $v_n > 0$)

alors $\sum u_n$ diverge.

1.3 Règle de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme. Nous la traitons donc en cours. Mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

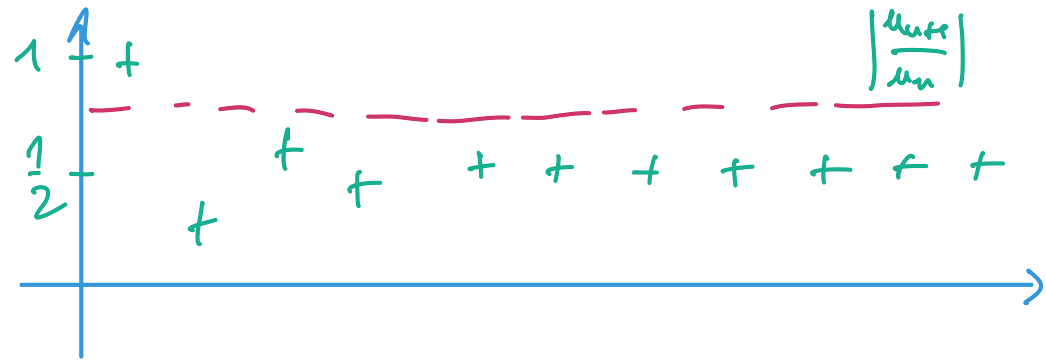
Astuce **~~Règle~~ de d'Alembert.** Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

$\sum u_n$ cv ?

↳ comparaison de u_n à une série de réf.

si par ex $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \frac{1}{2}$



si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \frac{1}{2}$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{3}{4}$

(par déf avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$)

donc $\forall n \geq N$ $|u_{n+1}| \leq \frac{3}{4} |u_n|$

par réc $|u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} |u_N|$

↑ tg série géom cv.

Preuve. Par déf de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

il existe N tq $\forall n \geq N$ $\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| \leq \frac{1-\ell}{2}$

$$\ell - \frac{1-\ell}{2} \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \ell + \frac{1-\ell}{2}$$

en particulier $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$

Donc $\forall n \geq N$ $|u_{n+1}| \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)|u_n|$

donc par récurrence $|u_n| \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} |u_N|$

tg série géom absolument cv car $\left|\frac{\ell+1}{2}\right| < 1$

donc $\sum u_n$ cv absolument.

. Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$

[...]

$\forall n \geq N$ $|u_{n+1}| \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)|u_n|$

par récurrence $|u_n| \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} |u_N|$

$\downarrow n\to+\infty$

$+\infty$ car $\frac{\ell+1}{2} > 1$

donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

• Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 1$ ou si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ n'a pas de limite on ne peut rien dire.

Remarque : Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 1^{+}$

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 1$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$

$\uparrow$

$(|u_n|)_n \searrow$

Exemple : Cv de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Appliquons la règle de d'Alembert à $z \neq 0$ fixé :

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ cv absolument.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

div $\qquad\qquad$ cv

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 1$$ donc on ne peut pas conclure

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

M$\cancel{1}$2 On applique la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

donc $\sum \frac{n^2}{2^n}$ cv absolument

M$\cancel{2}$1 Comparons $\frac{n^2}{2^n}$ au trg d'une série de réf

$$\frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^4}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\, o(1) \qquad \text{car } n^4 \ll 2^n$$

$$= o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ cv absolument.

$$f : x \longmapsto \sum \frac{x^n}{n!}$$