Pour moi : 203.8, 203.16

2 Produit de Cauchy de deux séries

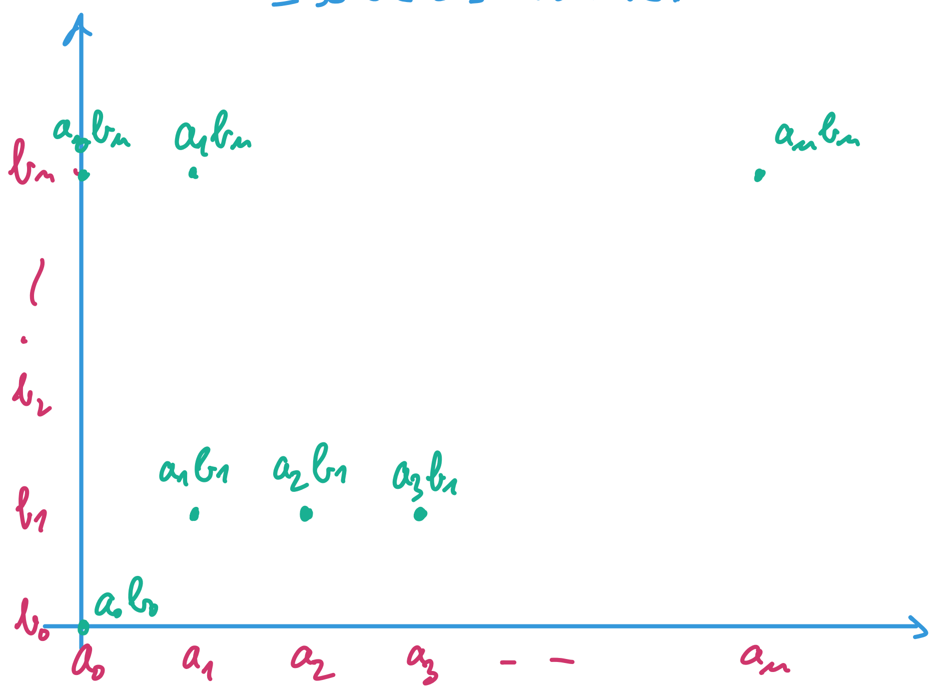
$$(a_0 + a_1) \times (b_0 + b_1) = \text{règle de calcul.}$$

$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1$$

$$= a_0 (b_0 + b_1) + a_1 (b_0 + b_1)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + a_1 b_1$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \times (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$
= somme des termes vert.



$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_j\right)$$

$$= \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j$$

On fait des "paquets" où $i+j=\text{cst}$

$$= \sum_{p=0}^{2n} \sum_{\substack{i,j \\ \text{où } i+j=p}} a_i b_j$$

$$= \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{p} a_i b_{p-i} \right)$$

Rmq : $\left(\sum_{i=0}^{p} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} b_j X^j\right)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$= \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$$

où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Et les séries ? $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

$= (u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots) \times (v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots)$

On peut faire un produit en regroupant les termes par anti diagonales $(p+q=\text{cst})$

On introduit une autre série $\sum w_n$

où $w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$

On peut penser : $\sum w_n$ cv et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *On peut aussi noter* $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

> On conserve les notations de la définition.
> Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve. Non exigible. Proposée en complément au § 4.2. □

Rmq : en proba, on parlera de familles sommables, on dira que si une somme cv absolument, on peut sommer en réordonnant les termes comme on veut.

(cf coupures par paquet $p+q=\text{cste}$)

Rmq : Il faut appliquer strictement les formules.

Si par ex : $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ $\left(\sum_{n\geq 0} e^{-n}\right)$

Posons les notations :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$v_n = e^{-n} \quad \forall n$$

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e^{-n+k}$$

Remarque : on peut utiliser le produit de Cauchy dans les 2 sens.

↳ pour faire un produit de 2 sommes

↳ pour reconnaître dans une somme la somme d'un produit de Cauchy, donc le produit de 2 sommes.

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$. $= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

On reconnaît le t.g. du produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

$v_n = \frac{1}{2^n} \quad \forall n$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ cv absolument

donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ cv absolument

et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)$

$= \frac{\pi^2}{6} \times 1 . \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\pi^2}{3}$

$$e^{x+iy} = e^{x} e^{iy}$$

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$.

Remarque. *On verra que le produit de Cauchy s'utilise naturellement dans le contexte des séries entières.*

Posons $u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $v_n = \frac{z'^n}{n!}$

On effectue le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

On note donc
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}$$
$$= \frac{1}{n!} (z+z')^n$$
par le binôme

t.g de la série entière $e^{z+z'}$

Or $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument

(on aura un argument de rayon de convergence plus tard)

On le justifie ici

$$|u_n| = \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z| \times |z| \times \cdots \times |z|}{1 \times 2 \times \cdots \times n}$$
$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{\lfloor |z| \rfloor} \frac{|z|}{k}} \times \prod_{k=\lfloor |z| \rfloor + 1}^{n} \frac{|z|}{k}$$
$$\leq K \times \left(\frac{|z|}{\lfloor |z| \rfloor + 1} \right)^{n - \lfloor |z| \rfloor}$$

tq série géom
de raison < 1
donc abs. convergente

$$\underbrace{\left(\frac{|z| \cdots |z|}{1 \cdots \lfloor |z| \rfloor}\right)}_{K}\left(\frac{|z| \cdots\cdots |z|}{\lfloor |z| \rfloor + 1 \cdots\cdots n}\right)$$

Exemple: Produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(elles sont cv)

On pose $u_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$ $\quad v_n$ idem

Le produit de Cauchy est $\sum w_n$

où $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

or $\displaystyle |w_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}}$ car $k \leq n-1$ et $k \geq 1$

$= 1$ donc $\sum w_n$ div grossièrement.

Remarque : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \dots$

ne cv pas abs

$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$ calc $=$ val approchée.

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots$$

$$=$$

$$\underbrace{-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{6}+\dots}_{\sum_{n=1}^{N} \dots}$$

$\longrightarrow$ cv

pas vers la même valeur.

Pb Centrale si on applique le TSSA

on peut réordonner les termes pour que

la somme soit n'importe quelle valeur.