Pour ma : 203.11, 203.18, 203.21

### 1.4 Séries alternées

**Définition.** Une série réelle est dite **alternée** lorsqu'elle est de la forme :

$$\sum(-1)^n u_n$$

où $u_n$ est positif.
Ainsi, une série alternée est une série dont le terme général change de signe à chaque changement d'indice.
La série $\sum(-1)^{n+1}u_n$, avec $u_n \geqslant 0$ est aussi qualifiée d'alternée.

**Théorème spécial des séries alternées.**

> Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
> alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.

**Remarque.** *Le résultat s'adapte lorsque la série est $\sum(-1)^{n+1}u_n$.*
**Remarque.** *Ce théorème s'appelle parfois, dans certains ouvrages, le critère de Leibniz.*
**Résultat complémentaire.** uniquement si le T.S.S.A. s'applique

> Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout $n$, le reste $R_n$ a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.
> D'autre part, la somme $S$ est encadrée par deux sommes partielles successives.

**Remarque.** *Cela signifie que, lorsque le TSSA s'applique, le reste est majoré par son premier terme, en valeur absolue, et il est du signe de ce premier terme. Cela permet d'estimer a priori l'erreur commise lorsque l'on approxime $S$ par $S_n$.*

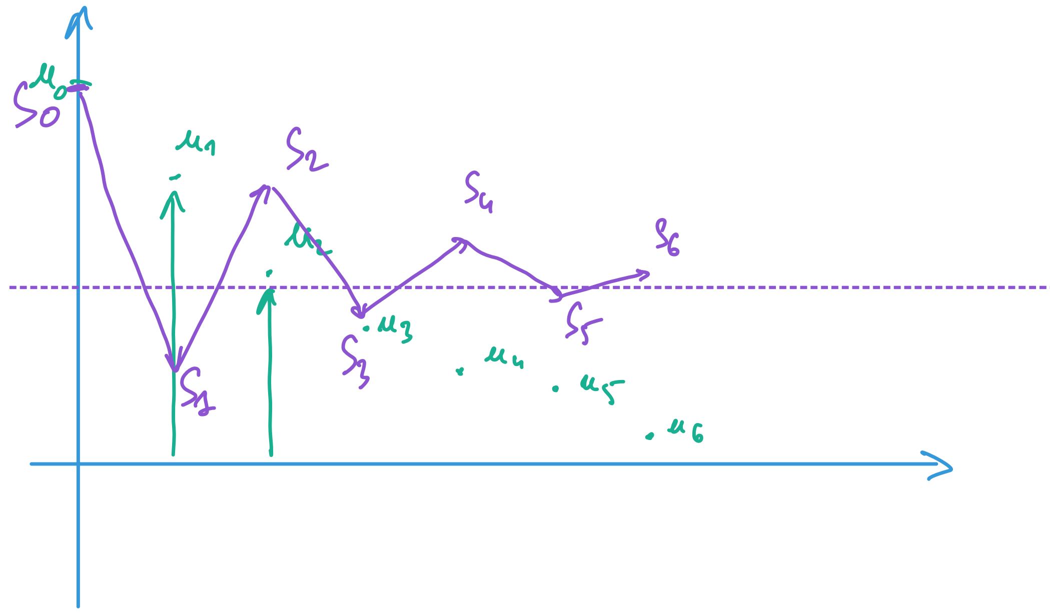
**Remarque.** *En utilisant ce résultat avec $\cancel{R_0}$ $R_{-1}$, on a le signe et une majoration de la somme.*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

$$= \underbrace{(-1)^{n+1} u_{n+1}} + (-1)^{n+2} u_{n+2} + (-1)^{n+3} u_{n+3} + \dots$$

le 1er terme majore $R_n$ en val absolue
donne le signe de $R_n$

Preuve :




On étudie la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

Mq que $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes

$*$ $S_{2p+2} - S_{2p} = \sum_{k=0}^{2p+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k u_k$

$= (-1)^{2p+2} u_{2p+2} + (-1)^{2p+1} u_{2p+1}$

$= u_{2p+2} - u_{2p+1}$

$\leqslant 0$ car $(u_n)_n \searrow$

$*$ $S_{2p+3} - S_{2p+1} = -u_{2p+3} + u_{2p+2}$

$\geqslant 0$ car $(u_n)_n \searrow$

$*$ $S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} u_{2p+1}$

$= u_{2p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Donc $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes, donc convergent et ont la même limite notée $S$.

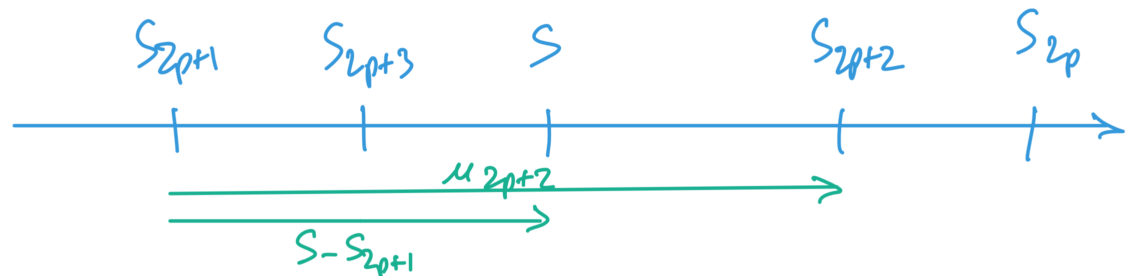
Ce sont les suites extraites de $(S_n)_n$ des termes d'indices pairs et impairs, $(S_n)_n$ converge et

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S .$$

<u>Bref</u>: $\sum (-1)^n u_n$ cv et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = S$

De plus: $\forall p$

$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq S \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}$$




$R_{2p+1} \geq 0$

du signe de $(-1)^{2p+2} u_{2p+2}$

on a $R_{2p+2} \leq u_{2p+2}$


$R_{2p} = S - S_{2p} \leq 0$

on a $|R_{2p}| \leq |u_{2p+1}|$

**Exemple.** Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

**Résultat.** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

On appelle ces séries les **séries de Riemann-alternées**.

**Remarque.** *Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le TSSA, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, étudiée au § 1.5*

Pour $\alpha > 1$ $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv absolument (Riemann)

Pour $0 < \alpha \leq 1$ $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne cv pas absolument.

$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est positive, décroissante, de limite nulle

donc $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ cv.

Pour $\alpha \leq 0$ $\quad \frac{1}{n^\alpha} \cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$

donc $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ div grossièrement.

Ce ne sont pas des séries de référence

Pas d'utilisation des thm de cv par comparaison ($\sim$, $o$, $O$, $\leq$)

qui ne parlent que de cv absolue

**Exemple.** Peut-on appliquer le TSSA à la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$ ? $u_n$

idée 1 $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$

on ne peut pas conclure.

car $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne cv pas absolument.

idée 2 $\quad |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ on ne peut pas conclure

($\sum u_n$ ne cv pas absolument)

idée 3 : $\quad u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n+(-1)^{n+1}}$

~~$\left(\dfrac{1}{n+(-1)^{n+1}}\right)_n$ est positive, ↘, de limite nulle~~

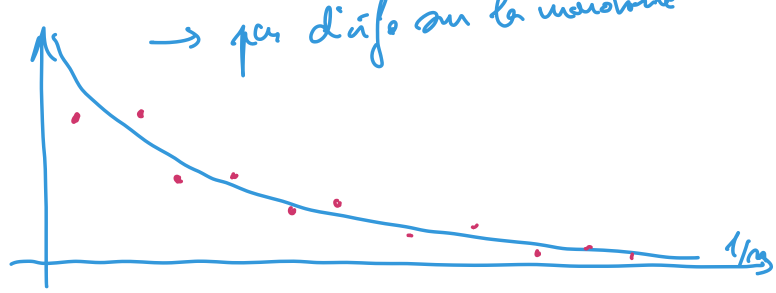
~~donc, par le th. spécial, $\sum_{n\geq 3} (-1)^n \dfrac{1}{n+(-1)^{n+1}}$ cv.~~

OK pour $n \geq 2$

OK

$$\frac{1}{n+(-1)^{n+1}} \sim \frac{1}{n}$$

→ pas d'info sur la monotonie



$$\frac{1}{(n+1)+(-1)^{n+2}} - \frac{1}{n+(-1)^{n+1}} = \dots$$

$$= \text{signe}$$

En eff : si la suite ne se voit pas comme ça, → chercher autre chose.

idée méthode d'éclatement.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\Big(1 \underbrace{- \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{O\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv et $\sum \frac{1}{n^2}$ cv et $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le tg d'une série abs. convergente

donc $\sum u_n$ cv

Et à celle de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ ?

idée 1 : Je suis astucieux !

pour $n$ pair, $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq 1$

$n$ impair $\leq 1$

donc la série est alternée.

En off : Ben non...

Pas si ce n'est pas clairement $(-1)^n u_n$.

idée : éclatement pour $n \to +\infty$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ cv comme série de Riemann alternée

$\sum -\frac{1}{2n}$ diverge (série harmonique)

$O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est le tg d'une série absolument convergente

Donc $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.