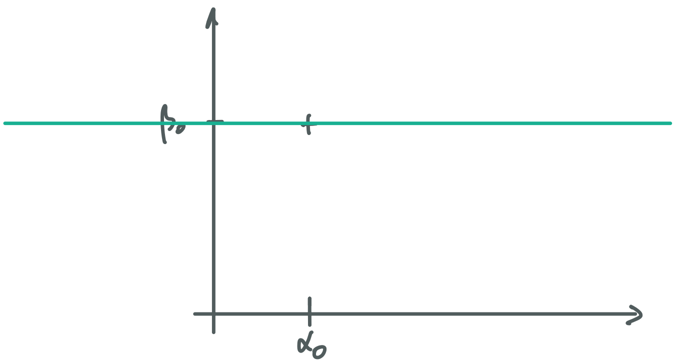
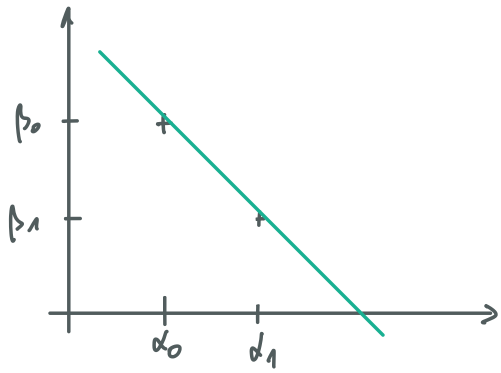
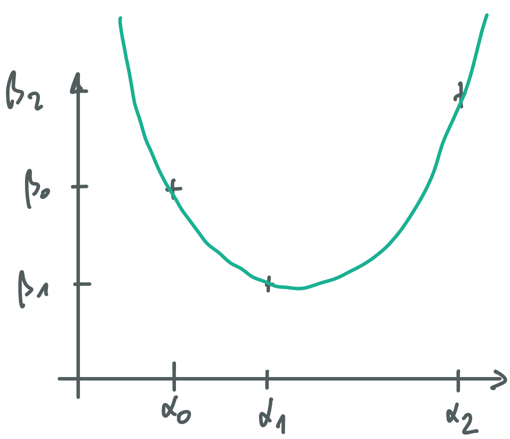
Pour moi : 101.23 , 101.38



$\mathbb{R}_0[X]$



$\mathbb{R}_1[X]$



$\mathbb{R}_2[X]$

Plus généralement : Étant donnés $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ 2 à 2 distincts, $\beta_0, \dots, \beta_n$ Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\forall k$ $P(\alpha_k) = \beta_k$?

1^{re} réponse : Soit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$P \longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))$$

* ϕ est linéaire
* Si $P \in \operatorname{Ker} \phi$, $P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n) = 0$

  donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $(n+1)$ racines au moins

  donc $P = 0$

  donc ϕ est injective.
* $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$

  donc ϕ est bijective

Ainsi : $\forall (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists ! P \in \mathbb{R}_n[X]$

tq $P(\alpha_k) = \beta_k$ $\forall k$

Remarque : démo "facile".

inconvénient : fournit l'existence de P, pas son expression.

2^e réponse. Cherchons L_i tq $\phi(L_i) = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \dots 0)$

Analyse : $L_i(\alpha_0) = 0$

$L_i(\alpha_1) = 0$

$\vdots$

$L_i(\alpha_n) = 0$

$L_i(\alpha_i) = 1 \neq 0$

donc $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1} \dots \alpha_n$

sont des racines de L_i.

Or $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ avec n racines

donc $\exists \lambda$ tq $L_i = \lambda . \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - \alpha_k)$

et $L_i(\alpha_i) = 1$ donc $\lambda = \dots$

Finir:

Posons $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \dfrac{(X - \alpha_k)}{(\alpha_i - \alpha_k)}$

on a $L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$

donc $\phi(L_i) = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots 0)}_{e_i}$

Conséquences $(\beta_0, \dots \beta_i, \dots, \beta_n)$

$$= \sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, \phi(L_i)$$

$$= \phi\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i}_{P \text{ dont l'image est } (\beta_0, \dots \beta_n)} \Big)$$

Remarque : ϕ isomorphisme

$$L_i = \phi^{-1}(e_i)$$

donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (image par un isomorphisme d'une base de $\mathbb{R}^{n+1}$)

Donc tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est CL de $L_0 \ldots L_n$

On a : $$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(\alpha_i)\, L_i(X)$$

pol de degré $\leq n$

qui coïncident en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$

et aussi $$1 = \sum_{i=0}^{n} 1 .\, L_i(X)$$

2.5 Interpolation de Lagrange

Définition. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n+1)$ scalaires deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on note :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - \alpha_k)}{(\alpha_i - \alpha_k)}$$

que l'on appelle **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Remarque. *Pour tout i, j, on a* $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Lemme.

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(X) = 1$$

Théorème.

$(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
On peut préciser, pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) L_i(X)$$