Pour lu : ex à rédiger

Pour ma : 202.20, 101.9, 101.11

1.5 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Rappel. Caractérisation par décomposition unique.
En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.
En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Mque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ev

idée 1 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ stable par CL

idée 2 : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \forall i,j \quad a_{ij} = a_{ji}$

$\iff A^T = A$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(u)$

où $u = \tau - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

où $\tau : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$M \longmapsto M^T$

de même $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$

Dimension de $S_n(\mathbb{R})$ (résultat hors programme, utile)

$$\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Explication :

$$A \in S_n(\mathbb{R}) \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

choisis librement

imposés

dim = nb de coeff indép à définir pour définir un élément de l'ensemble.

il y en a $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

Preuve : $A \in S_n(\mathbb{R}) \iff \exists\, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{22}, \dots, a_{nn}$

tq $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\iff \exists\, a_{ij} \text{ tq } A = a_{11}E_{11} + a_{12}(E_{12}+E_{21}) + \cdots + a_{nn}E_{nn}$$

Donc $S_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}, E_{12}+E_{21}, \dots, E_{1n}+E_{n1})$

$$= \mathrm{Vect}\left((E_{ii})_{1\le i\le n}, (E_{ij}+E_{ji})_{i<j}\right)$$

famille génératrice, libre car échelonnée.

donc base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

De même $A_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left((E_{ij} - E_{ji})_{i<j} \right)$

<u>Multiplication des matrices</u>

$E_{ij} \times E_{kl}$

$$\begin{array}{ccc} A & \times & X \end{array}$$

$$\left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n$$

CL colonnes de A.

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \end{array}$$

$$\left(C_1 \middle| C_2 \cdots \middle| C_n \right) \left(X_1 \middle| X_2 \middle| \cdots \middle| X_n \right) = \left(AX_1 \middle| AX_2 \cdots \middle| AX_n \right)$$

CL des colonnes de A

$E_{ij} \times E_{kl}$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} & & j & & \\ & & 1 & & \\ C_1 & \cdots & C_j & & C_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & l & & \\ X_1 & \cdots & X_l & & X_n \\ & & 1 & & \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ k \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \underset{\substack{\| \\ 0}}{E_{ij}X_1} & \cdots & \underbrace{E_{ij}X_l}_{\text{peut être non nulle}} & \cdots & \underset{\substack{\| \\ 0}}{E_{ij}X_n} \end{pmatrix}$$

avec $X_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 0 \\ \vdots \\ \leftarrow 0 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 0 \\ \vdots \\ \leftarrow 0 \end{matrix}$

donc $E_{ij} X_l = \sum_{m=1}^{n} x_m C_m$

$= x_k C_k$

nulle si $k \neq j$

$x_k C_k$ sinon

Ainsi : $\boxed{E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}}$

Chasles

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

Remarque :

$$A E_{ij}$$

$$\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_n \right) \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc|c} & & j & & \\ & & 1 & \cdots & i \\ X_1 & \cdots & X_j & X_n & \end{array}$$

$$= \left(\underbrace{AX_1 \middle| \cdots}_{0} \middle| \underbrace{AX_j}_{\text{potentiellement non nulle}} \middle| \underbrace{AX_n}_{0} \right)$$

$$= \left(0 \middle| \cdots \middle| C_i \middle| \cdots 0 \right)$$

colonne j

$$A (I_n + \lambda E_{ij})$$

$$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$$

Th du rang:

- E dim finie, $\qquad u \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\dim \underset{\text{source}}{E} = \dim \operatorname{Ker} u + \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{rg(u)}$$

- si u forme linéaire non nulle sur E de dim finie

$$u : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto u(x)$$

$\operatorname{Im}(u)$ sous.ev de $\mathbb{K}$ ← de dim 1

↑ non nul. $\qquad$ donc $\dim \operatorname{Im}(u) = 1$

Par le th du rang : $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$

ie $\operatorname{Ker} u$ est hyperplan.

- Version matricielle. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\dim \underbrace{\operatorname{Ker} A}_{\{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \,|\, AX=0\}} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} A}_{\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n)} = n = \dim \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

$$u : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto AX$$

Dim $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Leftarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

coeff librement choisis

n^2 coeff $\rightarrow \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\Big((E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \Big)$$

dim $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{B}$ base de E

$$\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$u \longmapsto \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$$

isomorphisme

Mque $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

M1 * Analyse - synthèse

analyse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

on suppose $\exists (A, S) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{S}_n$ tq

$$M = A + S$$

on a $M^T = -A + S$

donc $A = \dfrac{M - M^T}{2}$ et $S = \dfrac{M + M^T}{2}$

d'où l'unicité de A, S sous réserve d'existence

Synthèse on pose $A = \dfrac{M - M^T}{2}$ et $S = \dfrac{M + M^T}{2}$

on a $A^T = -A$ $S^T = S$

et $M = A + S$

d'où l'existence

M2 : la somme est directe + argument de dimension

- Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$

donc $M^T = -M$ et $M^T = M$

donc $M = 0$ ie $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$

- $\dim \mathcal{S}_n + \dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2}$

$= n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q3 * Mq la somme est directe et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$

- $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$
- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n}$$

Q4 * Mq $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$ + argument de dim.

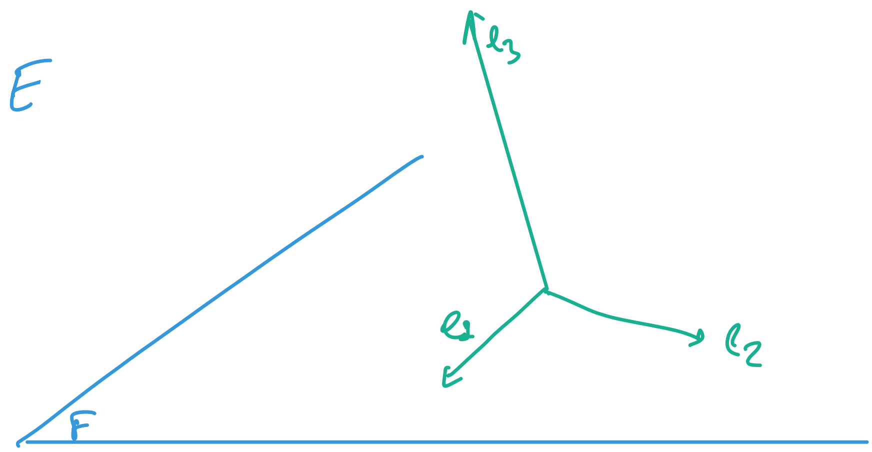
(Q5 * τ est une symétrie donc diagonalisable

donc $E_1(\tau) \oplus E_{-1}(\tau) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E.

Remarque. *Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.*



$\mathcal{B}$ est une base adaptée à F ssi

ses premiers vecteurs forment une base de F.

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, e_2}_{\text{base de } F}, e_3)$$

Directement : $E = F \oplus \mathrm{Vect}(e_3)$