Pour me : 202.18, 101.1, 101.2

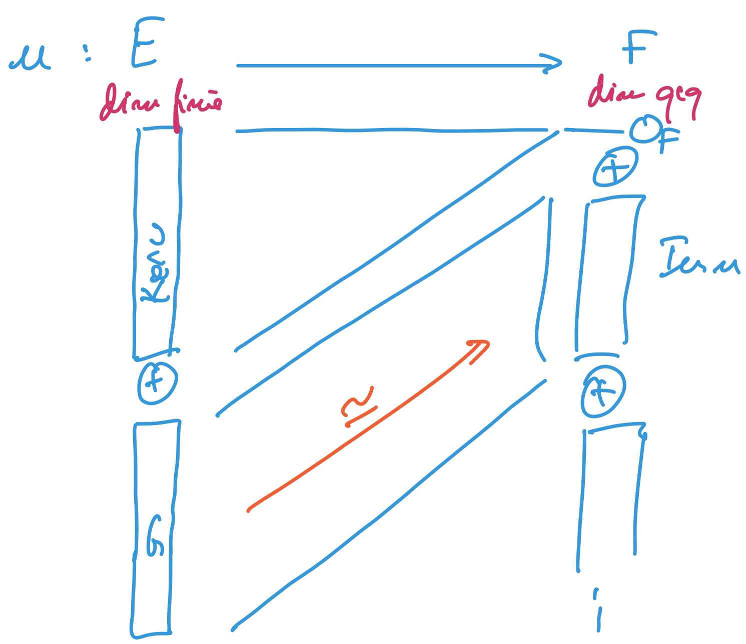
Version "géométrique"

Ker u sous ev de E

on note G un supplémentaire de Ker u dans E :

$$\mathrm{Ker}\, u \oplus G = E$$

Alors : u induit un isomorphisme entre G et Im u.



Ainsi $\tilde{u} : G \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ bijection.

$x \longmapsto u(x)$

* $\tilde{u}$ est bien défini car $\forall x \in G$, $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$

* Mque $\tilde{u}$ injective ie $\mathrm{Ker}\, \tilde{u} = \{0_E\}$ ie $\mathrm{Ker}\, \tilde{u} \subset \{0_E\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, \tilde{u}$

donc $x \in G$ et $\underset{\substack{\shortparallel \\ u(x)}}{\tilde{u}}(x) = 0$

donc $x \in G$ et $x \in \mathrm{Ker}\, u$

donc $x = 0_E$ car $G \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$

* Mque $\tilde{u}$ surjective

Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$ (espace d'arrivée de $\tilde{u}$)

ie $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

Or $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus G$

donc $\exists (x_k, x_G) \in \mathrm{Ker}\, u \times G$

tq $x = x_k + x_G$

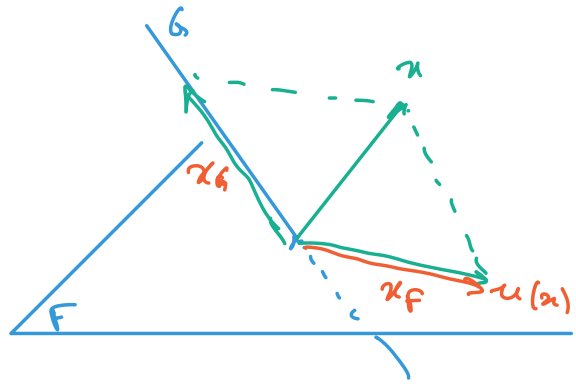
Alors
$$\begin{aligned} y &= u(x_k + x_G) \\ &= u(x_k) + u(x_G) \\ &= 0 + \tilde{u}(x_G) \end{aligned}$$

on a trouvé $x_G \in G$ tq $y = \tilde{u}(x_G)$

donc $\tilde{u}$ est surjective

- Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

Approche 1 :



déf $E = F \oplus G$

u projection sur F

de direction G

$$u : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto \text{l'unique } x_F \text{ dans l'écriture}$$

$$x = x_F + x_G \text{ selon } F \oplus G.$$

prop u est linéaire

$u \circ u = u$

$\operatorname{Ker} u = G$

$\operatorname{Im} u = F$

$F = \operatorname{Inv} u$

$= \{x \in E \text{ tq } u(x) = x\}$

$= \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$

Approche 2 $p \in \mathcal{L}(E)$

~~déf~~ p projecteur $\iff$ $p \circ p = p$

et dans ce cas, c'est p est

le projecteur sur $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$

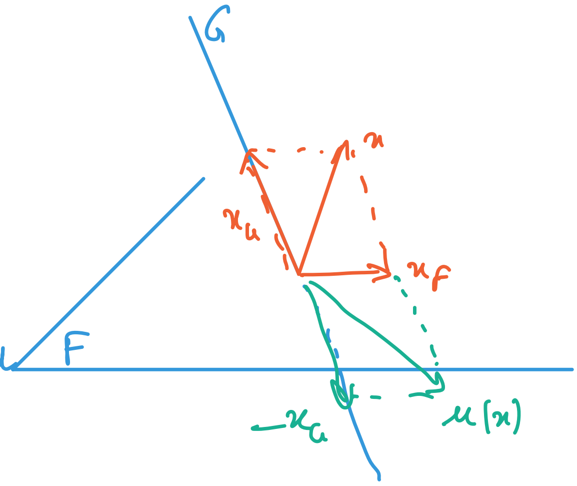
de direction $\operatorname{Ker}(p)$

Symétrie

Approche 1

$E = F \oplus G$

u symétrie par rapport à F, de direction G



$$u : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x_F - x_G \quad \text{où} \quad x = x_F + x_G$$

est l'unique décomp. de x selon $F \oplus G$

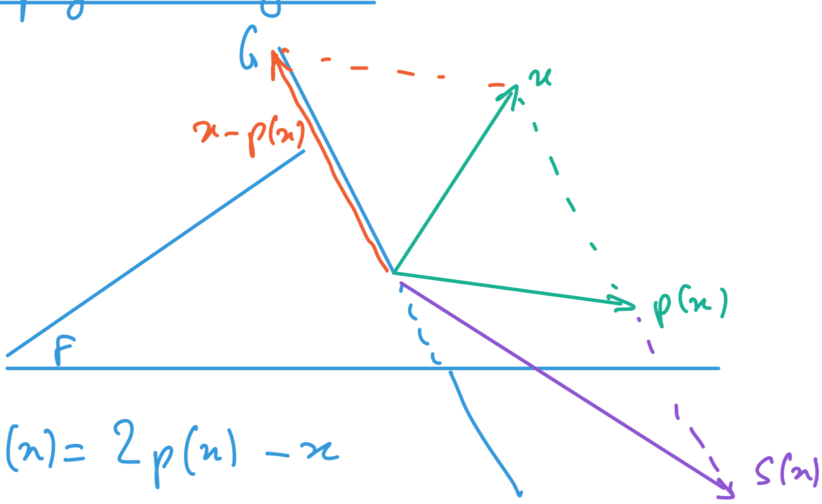
Prop : $u \in \mathcal{L}(E)$

$u \circ u = id_E$

$F = Inv(u) = \mathrm{Ker}(u - id_E)$

$G = Opp(u) = \mathrm{Ker}(u + id_E)$

Lien projecteur symétrie



$s(x) = 2p(x) - x$

$$s = 2p - id_E$$

ou encore $$p = \frac{1}{2}(s + id_E)$$

- Qu'est-ce qu'une **matrice** ?

nombre dans $\mathbb{K}$

1 → tableau de scalaires

→ opérations $+$, $\cdot$, $\times$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

nb lignes   nb colonnes

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

matrices carrées

$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ $\left(\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})\right)$

colonnes

2 les matrices représentent des objets.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

où $\mathbb{K}^n$ est muni de la base canonique

"u est canoniquement associé à A".

ou A représente $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$

où $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ muni de sa base canonique.

$\mathbb{K}_3[X]$

$u \in \mathcal{L}(E)$ est représentée par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

en fixant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

en colonne les coord de $u(e_j)$ selon $e_1 \dots e_n$

Remq : $\mathcal{B}$ base de E

$$\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$u \longmapsto \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$$

est un isomorphisme qui respecte la loi "produit"

$$\mathrm{Mat}(u+v) = \mathrm{Mat}(u) + \mathrm{Mat}(v)$$
$$\mathrm{Mat}(\lambda u) = \lambda\, \mathrm{Mat}(u)$$
$$\mathrm{Mat}(u \circ v) = \mathrm{Mat}(u)\,\mathrm{Mat}(v)$$

Autre interprétation :

Une matrice peut représenter une famille de vecteurs.

E ev, $\mathcal{B} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$ base

$(\vec{x_1}, .., \vec{x_p})$ une famille de vecteurs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, .., x_p) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x_1 & - - & x_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

en colonne : coord ds x_j dans $\mathcal{B}$.

Rmq : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1) \,--\, u(e_n))$

Définition : $\mathcal{C} = (f_1, .., f_n)$ une autre base de E

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

ancienne base nouvelle base

$$\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_1 & - - & f_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

$$= \mathrm{Mat}(id, ... , ...)$$

Matrice de ~~système linéaire~~

équation linéaire : $u(x) = b$

2nd membre

linéaire vecteur inconnu

$$u : E \longrightarrow F$$

$$x \qquad\qquad b$$

Matriciellement, en fixant $\mathcal{B}$ base de E
$\mathcal{C}$ base de F

l'éq $u(x) = b$ s'écrit $AX = B$

<u>Rmq:</u> <u>Résoudre une équation linéaire ?</u>

Si on connaît x_1 sol part de $u(x) = b$

on raisonne ainsi :

$$x \text{ sol} \iff u(x) = b$$

$$\iff u(x) = u(x_1)$$

$$\iff x - x_1 \in \operatorname{Ker} u$$

$$\iff x \in x_1 \boxed{+} \operatorname{Ker} u$$

$$x_1 \boxed{+} \operatorname{Ker} u = \{ x_1 + t \text{ où } t \in \operatorname{Ker} u \}$$

$$= \text{translaté de } \operatorname{Ker} u \text{ par } x_1$$

- Qu'est-ce que le **rang** d'une matrice ?

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(u) \quad \text{où} \quad A = \mathrm{Mat}(u)$$
$$= \dim \mathrm{Im}(u)$$
$$\dim \mathrm{Vect}(C_1, .., C_n) = \dim \mathrm{Vect}(u(e_1) .. u(e_n))$$

- Qu'est-ce que la **transposée** d'une matrice ?

$$A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$A^T = (a'_{ij})_{i,j} \quad \text{où} \quad a'_{ij} = a_{ji}$$