Pour me : 201.49, 201.53

3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Remarque. *Sans autre précision, dans cette section, a et b sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et I désigne un intervalle dont les extrémités sont a et b.*
Lorsque a et b sont finis et $I = [a, b]$, il s'agit d'un segment.
Lorsque a est fini, $b = +\infty$ et $I = [a, +\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.

$I = [0, +\infty[$ $\qquad$ $I =]-\infty, +\infty[$

$I =]-\infty, 0]$ $\qquad$ ⋮

$I = [0, 1[$

$I =]0, 1]$

f continue par morx sur I

3.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

$\int_0^{\to 1} \frac{1}{(1-t)^2}\,dt$

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x<b}{\longrightarrow} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

- Lorsque $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x>a}{\longrightarrow} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

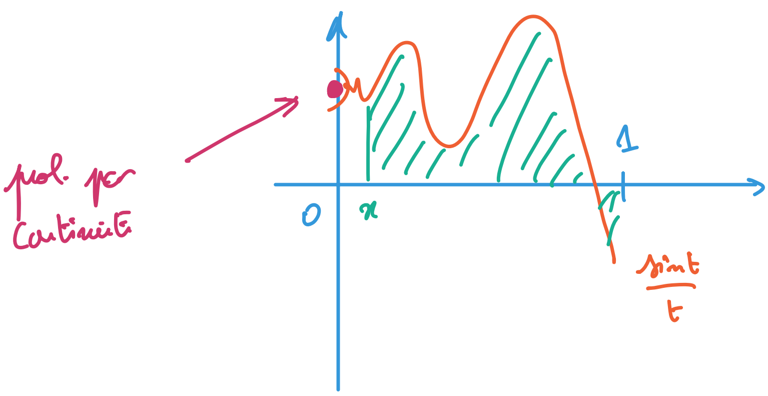
- Lorsque $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.
Prenant c tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

Remarque. *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de c. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.*

Proposition. Lorsque a (resp. b) est fini, et que f se prolonge par continuité en a (resp. b), alors l'intégrale généralisée en a (resp. b) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

Remarque. *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en $\pm\infty$.*

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.



$t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ continue sur $]0, 1]$

$\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin t}{t}\,dt$

or $\frac{\sin t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1 \xrightarrow[t \to 0]{} 1$

On note $F : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ prol. par continuité

F est continue sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)\,dt$ existe

(comme en 1re année)

Mque $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge en utilisant les intégrales partielles.

On va donc risque : $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \xrightarrow[x \to 0^>]{} \int_0^1 F(t)\,dt$

$$\left| \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^1 F(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_x^1 \underbrace{\frac{\sin t}{t} - F(t)}_{=0}\,dt - \int_0^x F(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^x F(t)\,dt \right|$$

$\xrightarrow[x \to 0^>]{} 0$ par continuité de F en 0.

<u>En effet</u> : F continue en 0 donc localement bornée : $\exists M, \exists \eta > 0$ tq

$\forall t \in [0, \eta], \quad |F(t)| \leq M$

donc $\displaystyle \left| \int_0^x F(t)\,dt \right| \leq \int_0^x |F(t)|\,dt$

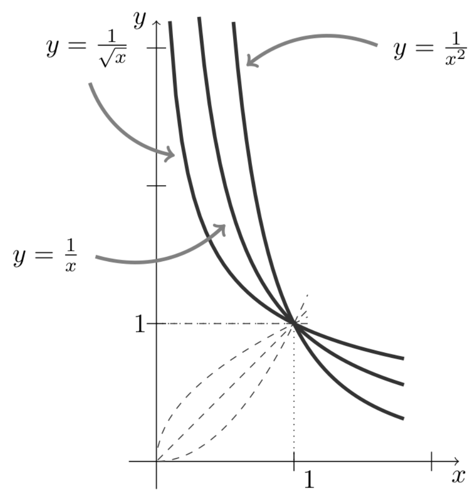
$\displaystyle \leq \int_0^x M\,dt$

$= Mx \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

3.2 Exemples de référence

Intégrales de Riemann en 0.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.



Preuve: on distingue $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$

et on passe par les int. partielles

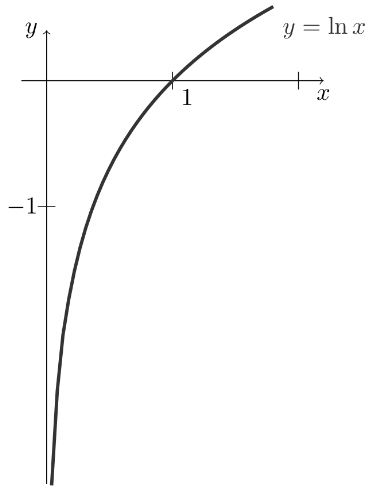
Pour $\alpha \neq 1$ $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_x^1 t^{-\alpha}\,dt$

$$= \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_x^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

a une limite finie pour $x \overset{>}{\to} 0$ ssi $\alpha - 1 < 0$

Logarithme en 0. L'intégrale généralisée $\int_{\to 0}^{1} \ln t \, \mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.



ln est continue sur $]0, 1]$

On passe par les intégrales partielles

$$\int_x^1 1 \ln t \, dt$$

$$= \left[t \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 t \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= -x \ln x - (1 - x)$$

$$\xrightarrow[x \to 0^{>}]{} -1$$

donc $\int_{\to 0}^{1} \ln t \, dt$ converge.

3.4.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour le cas d'un intervalle ouvert, pour l'étude de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un intervalle semi-ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. Si $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to \alpha}^{\to \beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

Remarque. *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \alpha \text{ à } \beta \end{array}$$

Remarque. *On peut adapter ce résultat au cas où φ est strictement décroissante.*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \beta \text{ à } \alpha \end{array}$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un problème de calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on peut gagner un peu de temps.*

Exemple. Convergence et calcul de ($\alpha > 0$) :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ 4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

I_1 I_2

I_1 : $x \mapsto \dfrac{x^4}{x^{10}+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$

On pose : $u = x^5$

$du = 5x^4\,dx$

u de 0 à $+\infty$ x de 0 à $+\infty$

I_1 est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{5(u^2+1)}$

qui est convergente, de valeur $\left[\frac{1}{5}\text{Arctan}(u)\right]_0^{+\infty}$

ie $\dfrac{\pi}{10}$.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u e^{-u^2}\,du$ $u \mapsto ue^{-u^2}$ Cpm sur $[0, +\infty[$

On pose $t = u^2$

$dt = 2u\,du$

t de 0 à $+\infty$ u de 0 à $+\infty$

sous réserve de cv de l'intégrale:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, \frac{1}{2} \, dt$$

qui converge comme intégrale de référence donc I_2 converge

$$= \left[\frac{1}{2} (-) e^{-t} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}$$

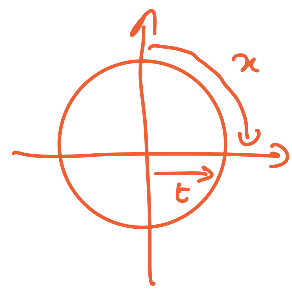
$$I_4 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$$

$t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ continue sur $[0,1]$

On pose : $t = \cos x$

$dt = -\sin x \, dx$

t de 0 à 1 $\quad$ x de $\frac{\pi}{2}$ à 0



$$I_4 = \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2 x} \, (-) \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x} \, \sin x \, dx \qquad = \int_0^{\pi/2} |\sin x| \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

car $\sin x \geq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$

$$= \frac{\pi}{4}$$

3. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$

$t \longmapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ continue sur $]a,b]$

(en fait continue sur $[a,b]$ si $\alpha \leq 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$$

on pose $u = t-a$

$du = dt$

t de a à b

u de 0 à $b-a$

I_3 est de même nature que $\displaystyle\int_{\to 0}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$

intégrale de Riemann qui cv <u>ssi</u> $\alpha < 1$

<u>Remarque:</u> • on peut utiliser directement ce résultat.

- C'est un fait général :

Pour étudier la cv de $\int_{\to a} f(t)\,dt$

On étudie la cv de $\int_{\to 0} f(a+u)\,du$

- de <u>même</u> :

Pour étudier la cv de $\int^{\to b} f(t)\,dt$,

on étudie la cv de $\int_{\to 0} f(b-u)\,du$