$\int_0^1 \cos t \, dt$ $\int_0^1 \ln t \, dt$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$

$\int_a^b f(t) \, dt$ $f$ continue sur $[a,b]$ segment.



# 1 Fonctions continues par morceaux

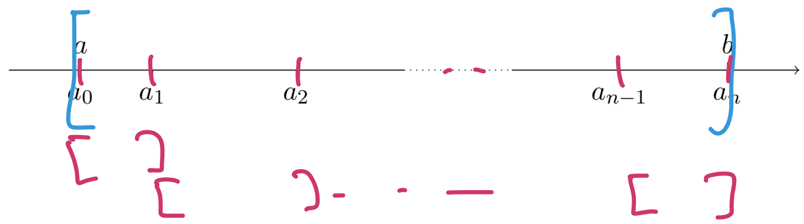
Dans toute cette section, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

## 1.1 Fonctions continues par morceaux

fermé, borné

**Définition.** On appelle **subdivision** du segment $[a,b]$ toute famille finie de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$



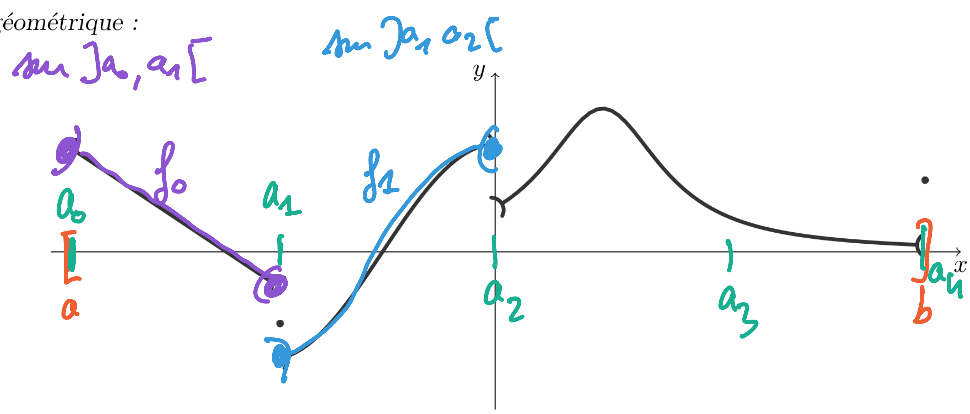

**Définition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \ f_{|]a_i, a_{i+1}[} \text{ se prolonge à } [a_i, a_{i+1}] \text{ en une fonction continue.}$$

On parle alors de subdivision **adaptée** à $f$, ou **subordonnée** à $f$.

**Remarque.**

- *Il n'y a pas une unique subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux.*
- *On peut définir un ordre (partiel) sur l'ensemble des subdivisions : une subdivision peut être plus fine qu'une autre.*
- *Dire qu'une fonction est continue par morceaux, c'est dire qu'on peut la considérer sur un nombre fini de « petits » intervalles où elle est continue, avec des limites finies de chaque côté.*
- *Vue géométrique :*




Traduc :
- $f$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$
- $f$ a une limite finie en $a_i$ à droite
- $f$ a une limite finie en $a_{i+1}$ à gauche

**Proposition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
En tout point où cela a un sens, $f$ admet une limite finie à droite et à gauche.

Preuve:

Soit $(a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$.

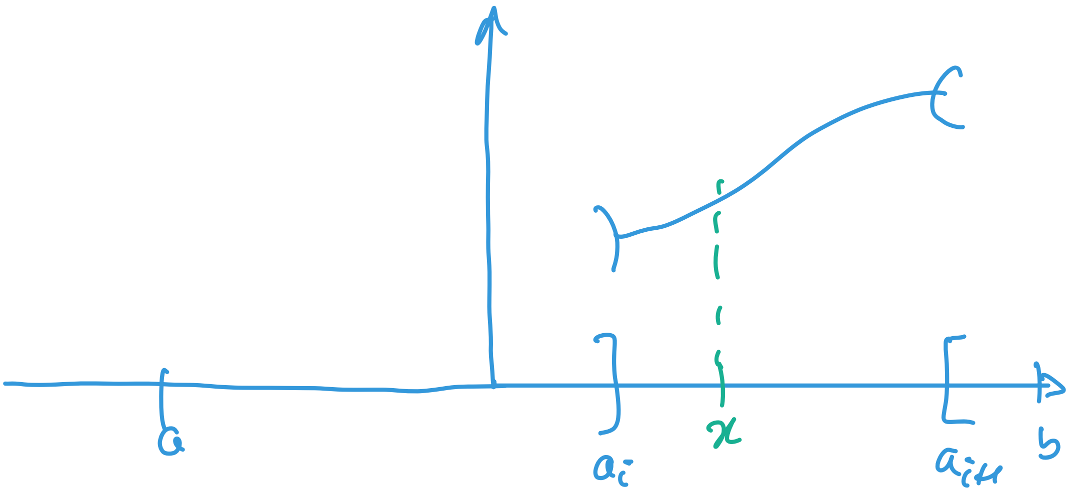
Soit $x \in [a,b]$.

1er cas: si $x \neq a_i$ $\forall i$

il existe $i$ tq $x \in ]a_i, a_{i+1}[$

et $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ continue donc $f$ continue en $x$.

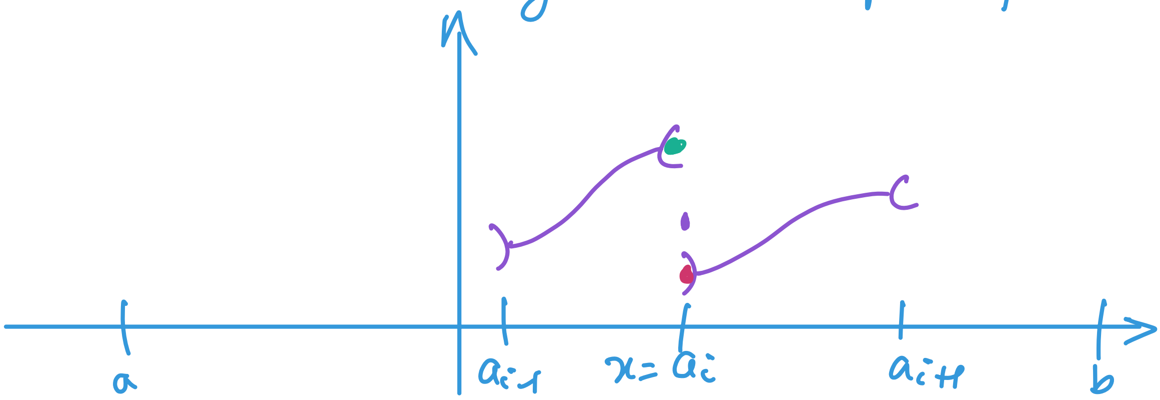
donc $f(t) \xrightarrow[t \to x]{} f(x)$




2e cas: si $x = a_i$

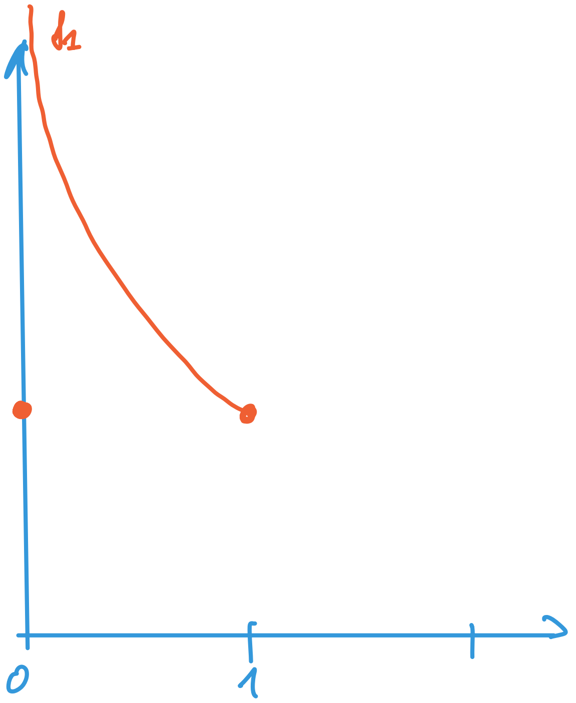
Alors: $f$ admet une limite finie à droite en $a_i$

et à gauche en $a_i$ par définition



**Exemple.** Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur le segment $[0, 1]$ ?

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

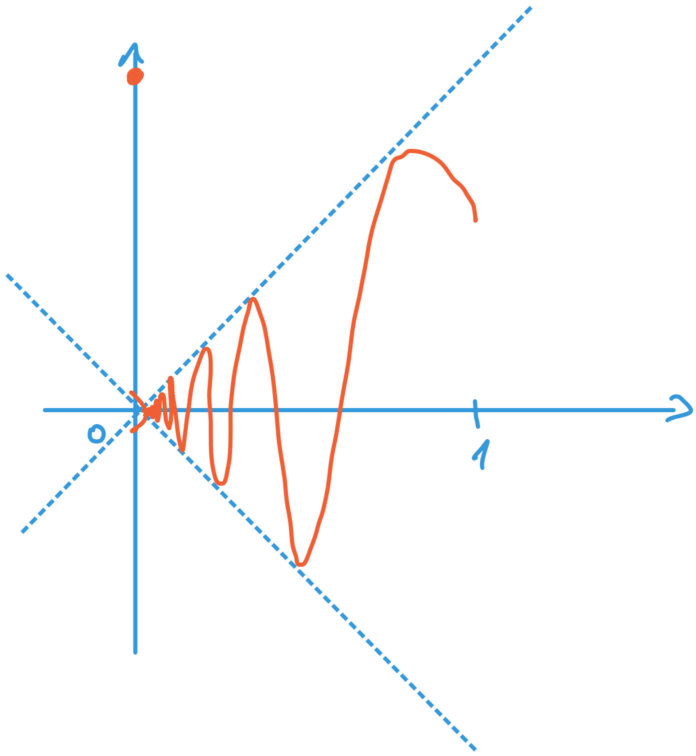



$f_1(x) \xrightarrow[x \to 0, >]{} +\infty$

(Rmq $x \to 0^+$ est une mauvaise notation)

donc $f_1$ n'est pas c.p.m sur $[0, 1]$

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

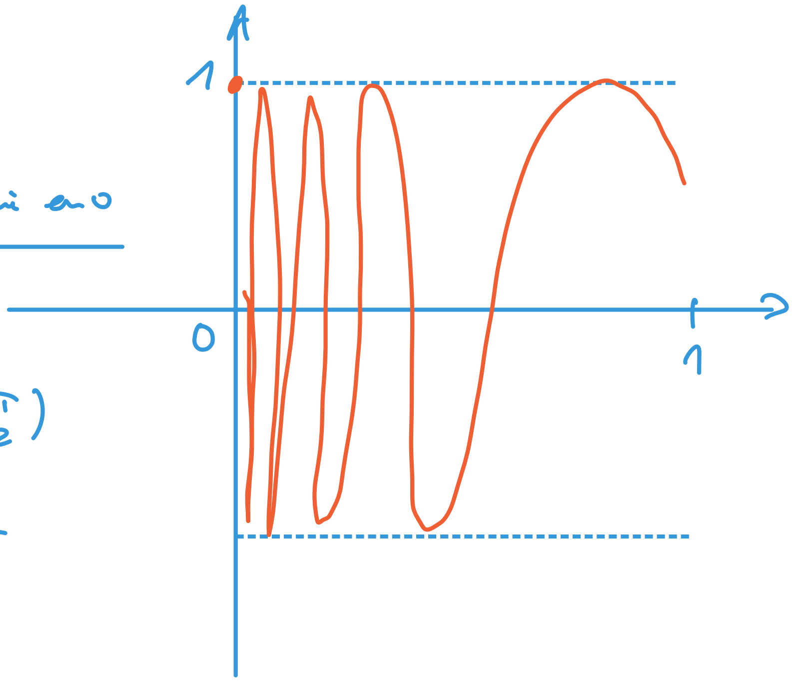



On note $(0, 1)$ une subd. de $[0, 1]$.

- $f_2|_{]0,1[}(x) = x \sin \frac{1}{x}$ continue sur $]0, 1[$
- $x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \leq 1]{} \sin 1$
- $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq x \xrightarrow[x \to 0, >]{} 0$ donc $x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0, >]{} 0$

Donc $f_2$ est cpm sur $[0, 1]$

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$




Mque $f_3$ n'a pas de limite finie en 0

$$f_3\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

$$f_3\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \sin(2k\pi)$$
$$= 0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

avec $\frac{1}{2k\pi} \to 0$ et $\frac{1}{2k\pi} > 0$, $\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0$ et est $> 0$

Donc $f_3$ n'a pas de limite finie en 0 à droite.

On a utilisé : Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Rappel : $n = \lfloor t \rfloor$ signifie $n \leq t < n+1$

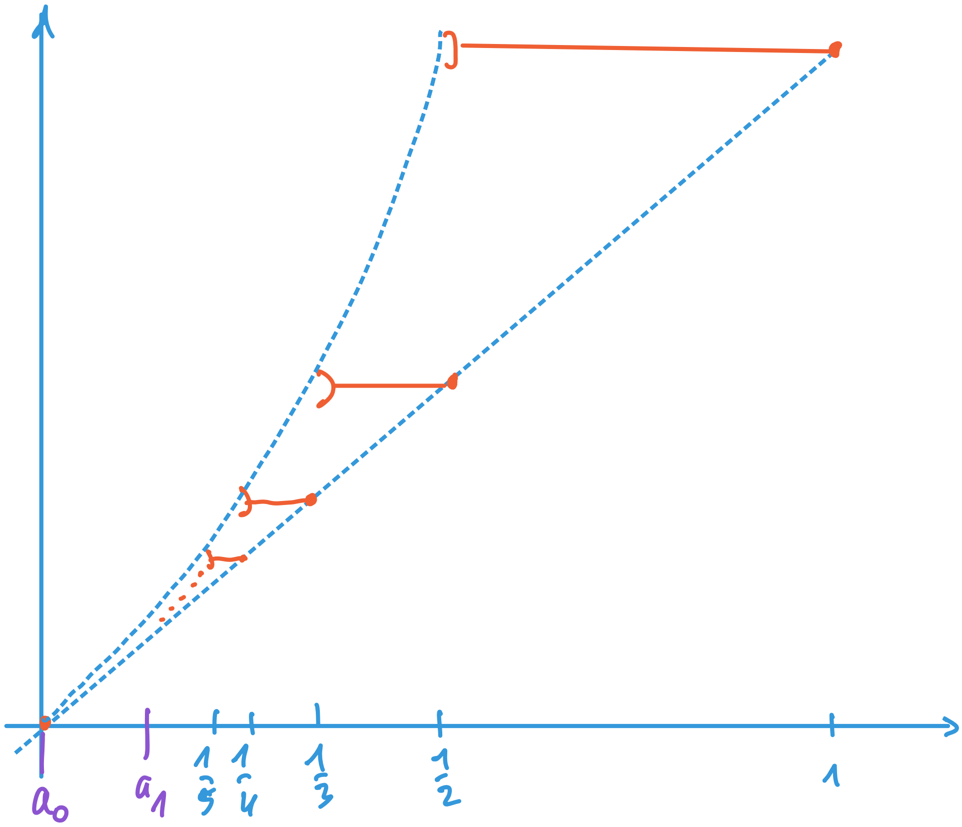
ou $t-1 < n \leq t$

$$f_4 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_4$ est constante sur les intervalles où $\frac{1}{x}$ est entre 2 entiers

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \iff n \leq \frac{1}{x} < n+1$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$




$f_4$ continue en 0 $\left(0 \quad \ldots \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$

pas une subdivision.

en fait $f_4$ n'est pas cpm sur $[0,1]$ car pour toute subdivision,

$f|_{]a_0, a_1[}$ n'est pas continue. [...]

## 1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

On généralise dans ce paragraphe la définition de l'intégrale vue en première année au cas des fonctions continues par morceaux.

segment

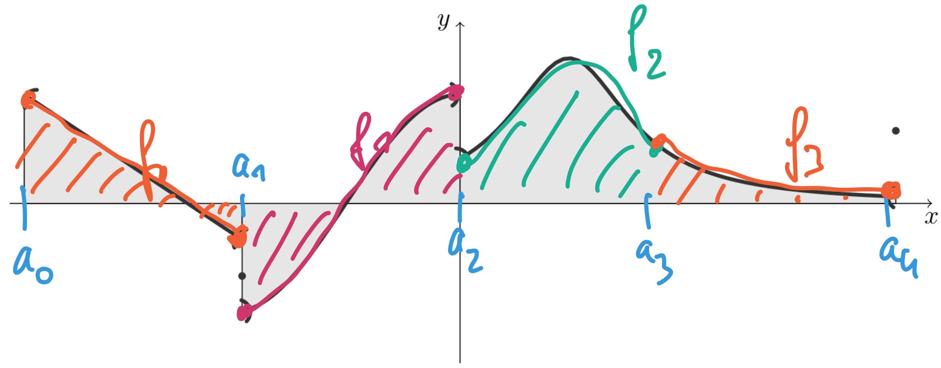
**Définition.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$. Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note $f_i$ le prolongement par continuité à $[a_i, a_{i+1}]$ de $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$. On appelle **intégrale de $f$ sur le segment** $[a, b]$, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, le nombre :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Somme finie

**Remarque.**

- *Chaque intégrale* $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$ *est une intégrale d'une fonction continue sur un segment, définie en première année.*
- *On peut justifier que ce nombre est indépendant du choix de la subdivision adaptée à $f$.*
- *Vue géométrique :*



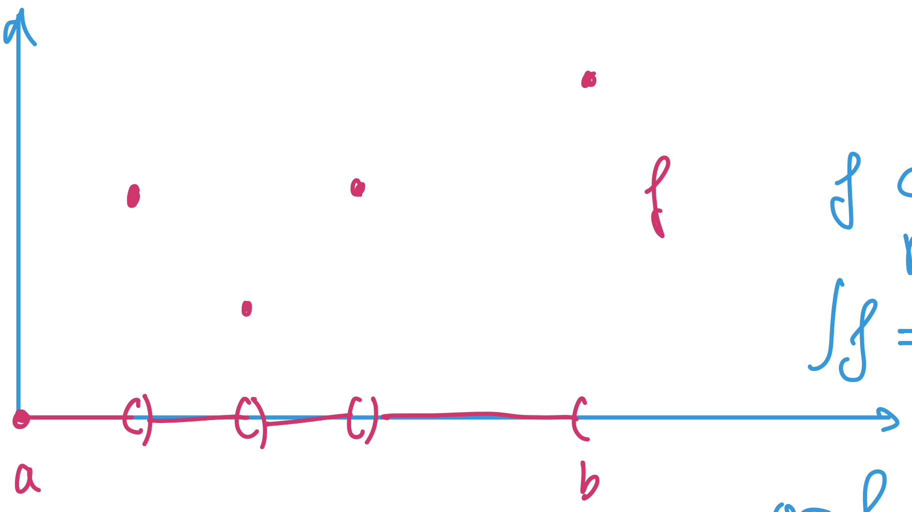

**Proposition.** Les propriétés étudiées en première année pour les fonctions continues sur un segment restent valables pour les fonctions continues par morceaux :

- Linéarité
- Croissance, positivité (pour les fonctions à valeurs réelles)
- Inégalité triangulaire
- Relation de Chasles

**Proposition.** Si $f$ est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors $f$ est nulle sur $[a,b]$.

*Preuve.* On comprend pourquoi la continuité par morceaux n'est ici pas suffisante. □

Exemple:




$f$ cpm positive ($\geq 0$)

$\int f = 0$

or $f \neq 0$

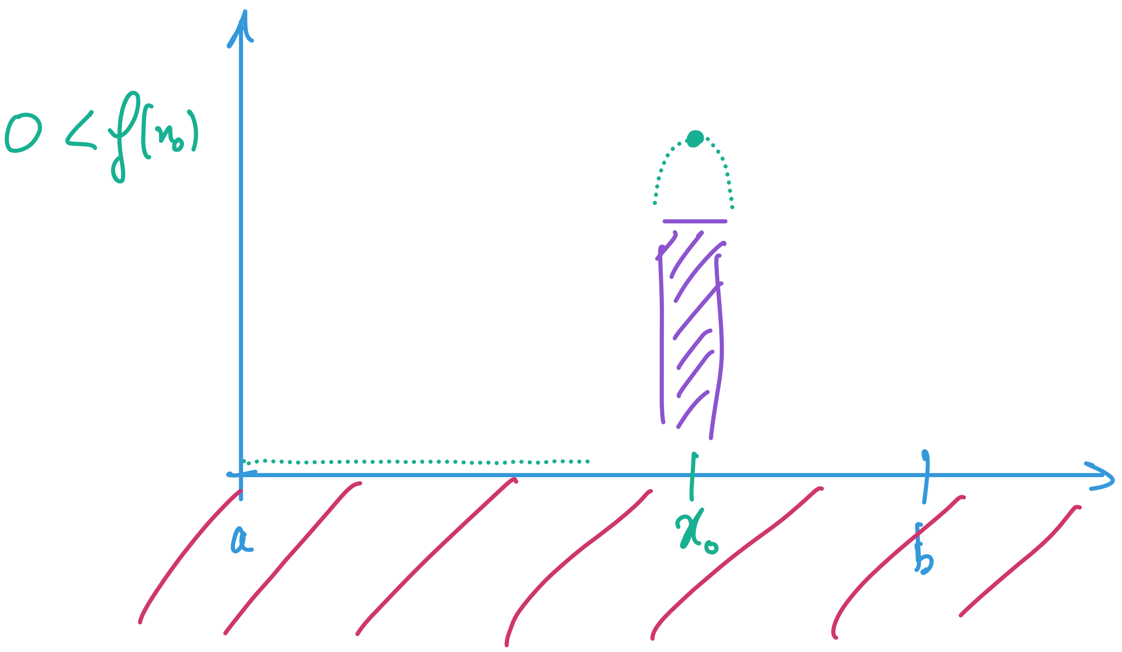
(on n'a pas : $\forall t,\ f(t) = 0$ )

Preuve:

Montrons la contraposée:

Soit $f \geq 0$, non nulle et continue.

Mq $\int_a^b f > 0$



$f$ n'est pas nulle donc $\exists x_0$ tq $f(x_0) > 0$

Par continuité de $f$ en $x_0$ avec $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

$\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

En part : $\forall x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ $\quad \underbrace{f(x_0) - \dfrac{f(x_0)}{2}}_{\dfrac{f(x_0)}{2} > 0} \leq f(x)$

Donc : $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\eta} + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} + \int_{x_0+\eta}^{b}$$

$$\geq 0 + \underbrace{\frac{f(x_0)}{2} 2\eta}_{>0} + 0$$

$$> 0$$

**Définition.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$. Soit $a \in I$. On appelle **intégrale fonction de la borne d'en haut de** $f$ l'application :

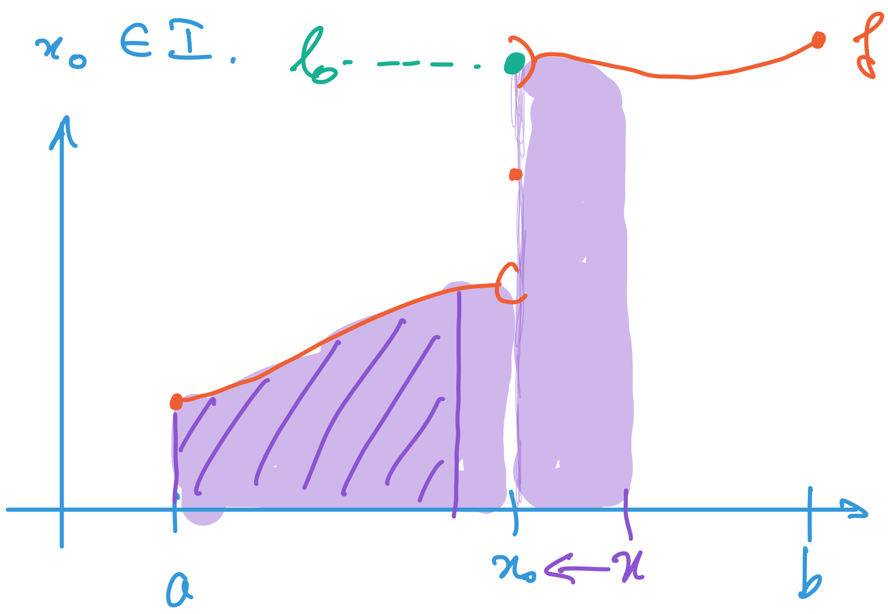
$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

**Proposition.** Avec les notations précédentes :

- $F$ est continue sur $I$ ;
- $F$ est dérivable à gauche et à droite en tout point de $I$ où cela a un sens ;
- Là où $f$ est continue, $F$ est dérivable et on a :

$$F'(x) = f(x)$$

Preuve: Soit $x_0 \in I$.




À droite de $x_0$, est-ce que $F$ est dérivable ?

Mque: $F$ est dérivable en $x_0$ à droite et sa dérivée est la limite de $f$ en $x_0$ à droite.

On note $\ell_0$ cette limite.

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell_0 \right| = \left| \frac{1}{x-x_0}\left( \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right) - \ell_0 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \ell_0 \right|$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \ell_0 \, dt \right|$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \left| \int_{x_0}^{x} f(t) - \ell_0 \quad dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} |f(t) - \ell_0| \quad dt$$

Zut. On n'arrive pas à majorer par qqch $\xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

On change notre raisonnement. On revient à la déf de limite. (C'est rare de faire ça !)

Soit $\varepsilon > 0$ qcq.

Par déf de $f(t) \xrightarrow[t \geq x_0]{} \ell_0$ avec ce $\varepsilon$,

$\exists \eta > 0$ tq $\forall t \in [x_0, x_0 + \eta]$ $\quad |f(t) - \ell_0| \leq \varepsilon$

Alors, pour $x \in [x_0, x_0 + \eta]$, on a $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + \eta]$

donc

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell_0 \right| \leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \varepsilon \, dt$$

$$= \varepsilon$$

Donc $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell_0$

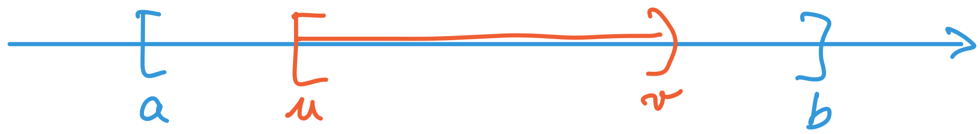
ie $F$ dérivable à droite et $F'_d(x_0) = \ell_0$.

**Définition.** Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est **continue par morceaux** sur $I$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de $I$.

**Exemple.** Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0,1]$ ?

Rmq : Tout segment de $I$ ?

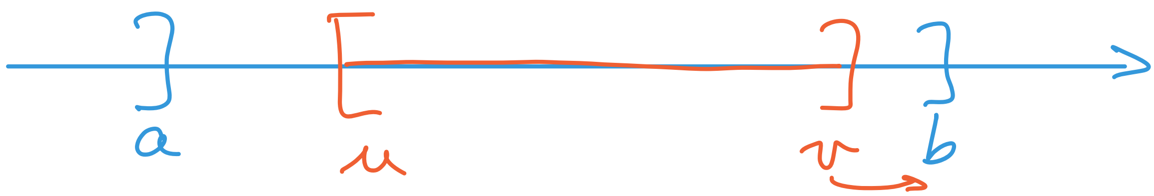
- $I = [a, b]$ segment




un segment de $I$ est $[u, v]$ tq $a \leq u \leq v \leq b$

(on peut prendre $[a, b]$)

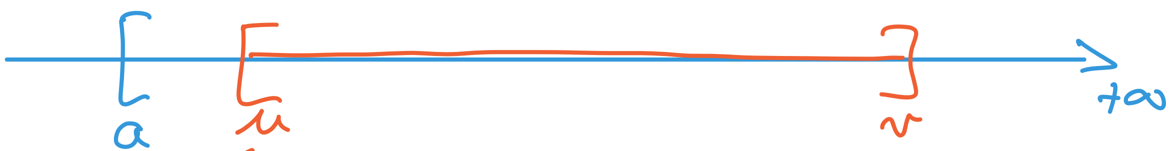
- $I = ]a, b]$




on "coupe" ce qui se passe près de a.

v peut être b

- $I = [a, +\infty[$

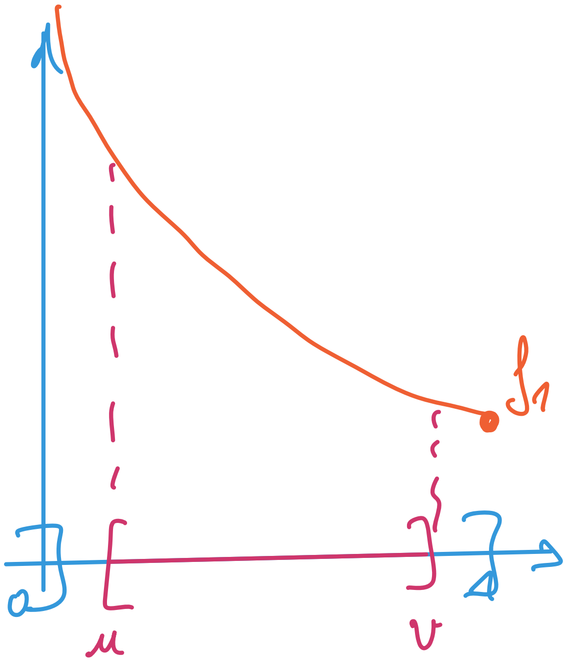



u peut être a

v est fini

$x \in ]0,1]$

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$




$\forall [u,v] \subset ]0,1]$

$f_1$ est continue (par ucx)

sur $[u,v]$

donc $f_1$ est cpm sur $]0,1]$

$f_2 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

de même, $f_2$ est cpm sur $]0,1]$

$f_3 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

de même, $f_3$ est cpm sur $]0,1]$

**Proposition.** Les fonctions continues sont continues par morceaux.

(sur un intervalle)

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

Soit $[u,v] \subset ]0,1]$

Soit $N = \lfloor \frac{1}{u} \rfloor$

$N \leq \frac{1}{u} < N+1$

$\frac{1}{N+1} < u \leq \frac{1}{N}$

On considère la subdivision :

$$\left(u, \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \frac{1}{N-2}, \dots, \frac{1}{\lfloor \frac{1}{v} \rfloor + 1}, v\right)$$

sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, $f_u$ est constante

donc se prolonge de façon continue à $[a_i, a_{i+1}]$

<u>CCl</u> : $f_u$ est cpm sur $]0,1]$

<u>C'est bizarre !</u>

$f_u$ est cpm sur $]0,1)$

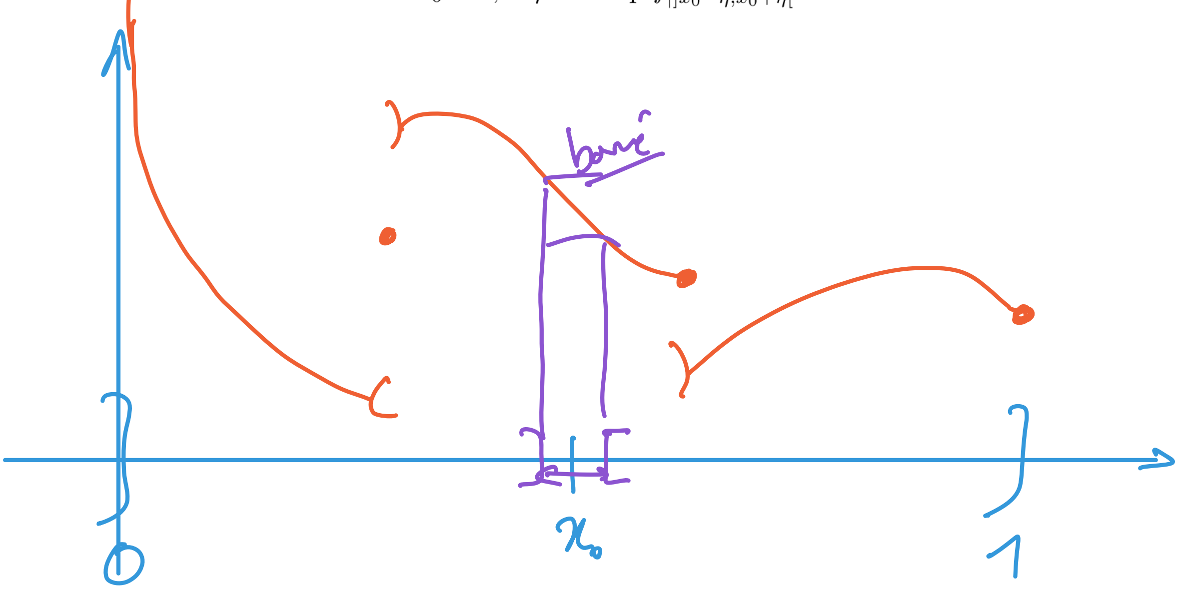
$f_u$ est continue en $0$

$f_u$ n'est pas cpm sur $[0,1)$

**Remarque.** *La définition se généralise au cas des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

**Proposition.** Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, *i.e.*

$$\forall x_0 \in I, \ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta, x_0+\eta[} \text{ bornée}$$




<u>En effet</u> chq $x_0$ peut être placé dans un $]a_i, a_{i+1}[$

donc $[a_i, a_{i+1}]$ où $f_i$ est continue, donc bornée.

<u>Et après ?</u>

* $\int_a^b f(t)\,dt$ où $f$ cpm sur $[a,b]$

* si $f$ cpm sur $]0,1]$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \ ?$$

$f$ cpm sur $[1,+\infty[$ $\qquad [1,x] \subset [1,+\infty[$

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \int_1^x f(t)\,dt$$

$x \to +\infty$