pour ma : 201.7, 201.5 et 201.38

à 9h35 : Begon, Bracher, Persand

6 Intégration sur un segment

1. Qu'est-ce qu'un segment ?
2. « Intégrale », « primitive », c'est pareil non ?
3. Peut-on dériver $x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x^2} \mathrm{Arctan}^2(t)\,\mathrm{d}t$?
4. Quelles sont les techniques de calcul des intégrales ?
5. Quel est le résultat concernant les sommes de Riemann ?

① segment $[a, b]$ intervalle fermé borné

Rmq : $[0, +\infty[$ est intervalle fermé.

n'a pas été défini

En 1re année : intégrale de fct continue sur un segment.

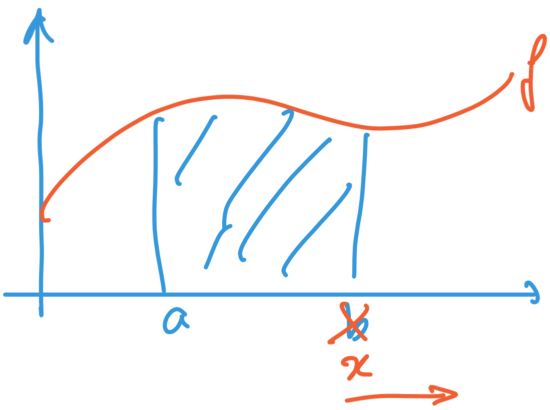
② Primitiver = contraire de dériver

$\cos t$

$\dfrac{d}{dt}$ primitivation

$-\sin t$

Intégrer = calculer un nb qui représente une aire



$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

intégrale

Si f est continue sur I intervalle,

$a \in I$

alors $x \longmapsto \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{intégrale fonction de la borne d'en haut}}$ est une primitive de f sur I

Remarque La continuité est une hypothèse importante.

Utilisation

Soit $g : x \longmapsto \int_0^x \cos(t^3)\,dt$

$t \mapsto \cos t^3$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = \cos x^3$

Théorème: (fondamental de l'analyse)

Soit f continue sur $[a, b]$ segment, dont on connaît

F une primitive de f sur $[a, b]$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b$

$= F(b) - F(a)$

Exemple : $f(x) = \int_x^{3x^2} \operatorname{Arctan}^2(t)\, dt$ dériver ?

$\boxed{\text{M1}}$ $t \mapsto \operatorname{Arctan}^2 t$ est continue sur $\mathbb{R}$

Soit F une primitive

On a : $f(x) = F(3x^2) - F(x)$ dérivable et

$$f'(x) = 6x\, F'(3x^2) - F'(x)$$

$$= 6x \operatorname{Arctan}^2(3x^2) - \operatorname{Arctan}^2(x)$$

$\boxed{\text{M2}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{3x^2} \operatorname{Arctan}^2(t)\, dt - \int_0^{x} \operatorname{Arctan}^2(t)\, dt$$

dérivable car composée d'int fct de la borne d'en haut d'une fct continue

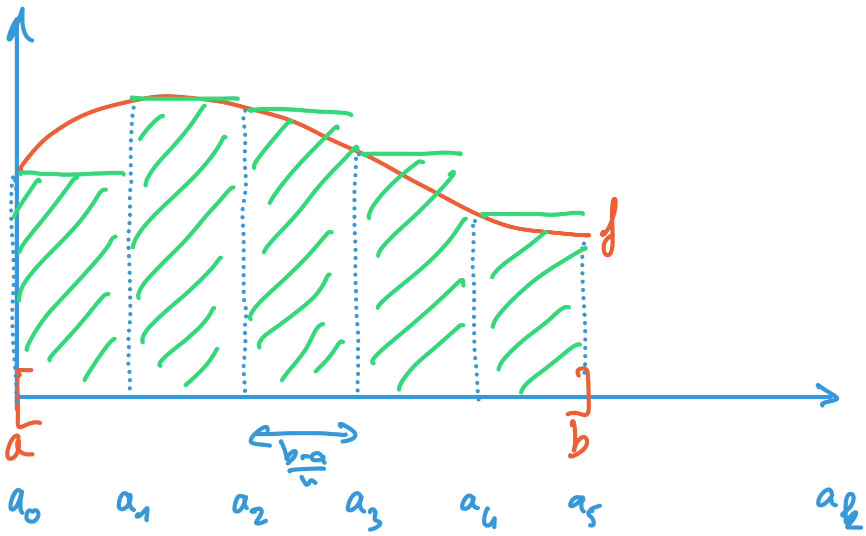
et $f'(x) = 6x \cdot \operatorname{Arctan}^2(3x^2) - \operatorname{Arctan}^2(x)$

4) Calcul d'intégrale :

* Th fondamental : ~~connaître une primitive~~ $\int^x \frac{t^6}{12} dt = \frac{x^7}{7 \times 12}$
* intégration par parties
* changement de variable

rédaction

5) Somme de Riemann :



$$a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

Sommes de Riemann de f sur $[a, b]$ (à gauche)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

<u>Th:</u> <u>Si</u> f est continue sur $[a, b]$

<u>alors</u> $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

<u>Remarque:</u> on peut définir les sommes de Riemann à droite

en posant $S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$

<u>Utilisation :</u>

$\boxed{a}$ "méthode des rectangles" d'approx des intégrales.

On remplace le calcul de l'intégrale par un calcul de somme finie ($\longrightarrow$ analyse numérique ...)

$\longrightarrow$ $\boxed{b}$ On doit trouver la limite d'une suite, et on reconnaît (presque) une somme de Riemann. Le Th donne la limite de cette suite.

Somme finie, $\frac{1}{n}$ en facteur, des $\frac{k}{n}$ dans la somme.