Pour lu : 201.4, 201.20, 201.27

3 Continuité

1. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant l'existence de limite ?
2. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant la continuité des fonctions ?
3. Lipschitzien, ça veut dire quoi ?

① limite de f en a

[limite à droite / à gauche]

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• Définition $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ $\quad \ell \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ $\quad (\ell = +\infty, a = +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \in \mathbb{R}$ tq $\forall x$ tq $|x-a| \leq \eta$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

on l'utilise jamais, sauf...

• En pratique

$f(a+h) = \dots$ $\quad h \to 0$

analyse asymptotique

~ DL ...

factoriser par termes prépondérants

négliger ce qui est négligeable

$\xrightarrow[h \to 0]{} \ell.$

- Th de limite monotone

  Si f croissante, majorée sur $]-\infty, a[$

  alors f admet une limite finie en a, à gauche

  (et on a $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ <}]{} \sup\limits_{]-\infty, a[} f$)

  existence du sup ...

  Ne donne pas la valeur de la limite.

- Th de limite par encadrement

  Si $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$

  $$\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \beta(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

  (même limite)

  Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

- en pratique

  Si on a l'intuition que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

  on étudie

  $$0 \leq |f(x) - \ell| \leq \ldots \leq \ldots \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

② Continuité :

limite $f(a)$ quand $x \to a$

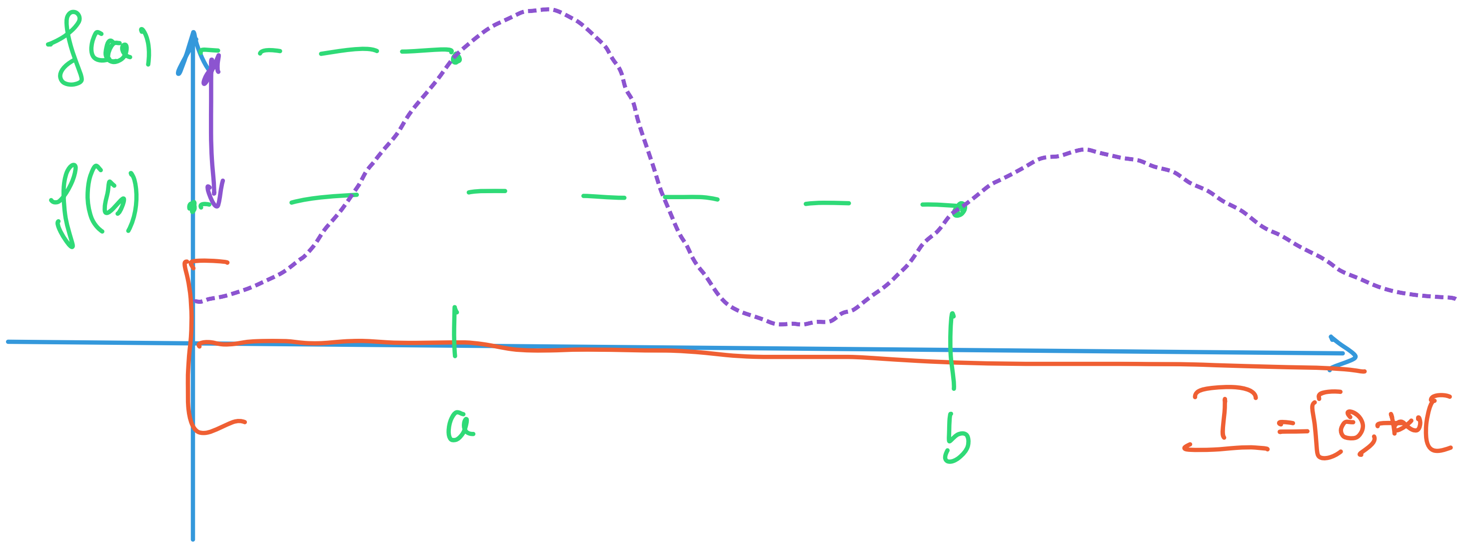
→ continuité en a (continuité locale)

→ continuité sur I intervalle (cont globale)

- **Th des V. I**

Si f continue sur I intervalle

Pour $a, b \in I$, f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$



• Th de la bijection

Soit f strictement ~~monotone~~ croissante

sur I intervalle

continue

$f(a) = \alpha$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \beta$

$I = [a, +\infty[$

donc f réalise une bijection

de $[a + \infty[$ sur $[\alpha, \beta[$

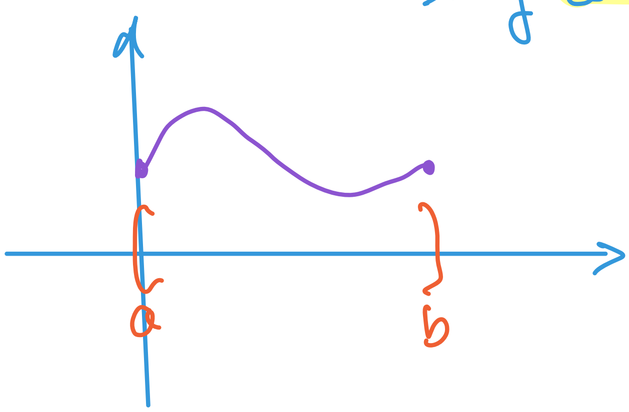
injectif

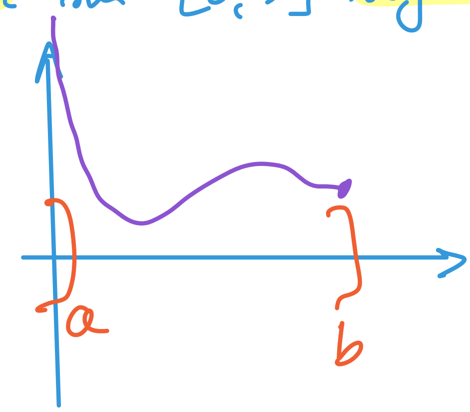
surjectif

T.V.I

• le Th des bornes atteintes

Si f continue sur $[a, b]$ segment





alors f est majorée (donc $\displaystyle\sup_{[ab]} f$ existe)

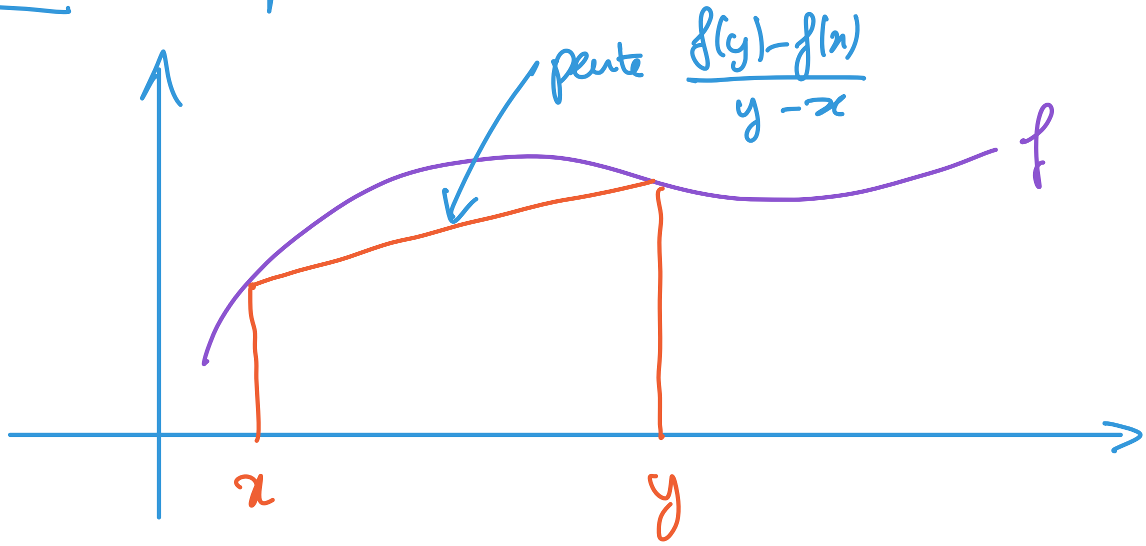
et sa borne sup est atteinte (c'est un max)

Rmq : y penser si on doit montrer qu'un max existe.

- f lipschitzienne sur I <u>si</u>

$$\exists k \text{ tq } \forall x,y \in I \quad |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

<u>En vrai</u> : les pentes des cordes sont $\leq k$



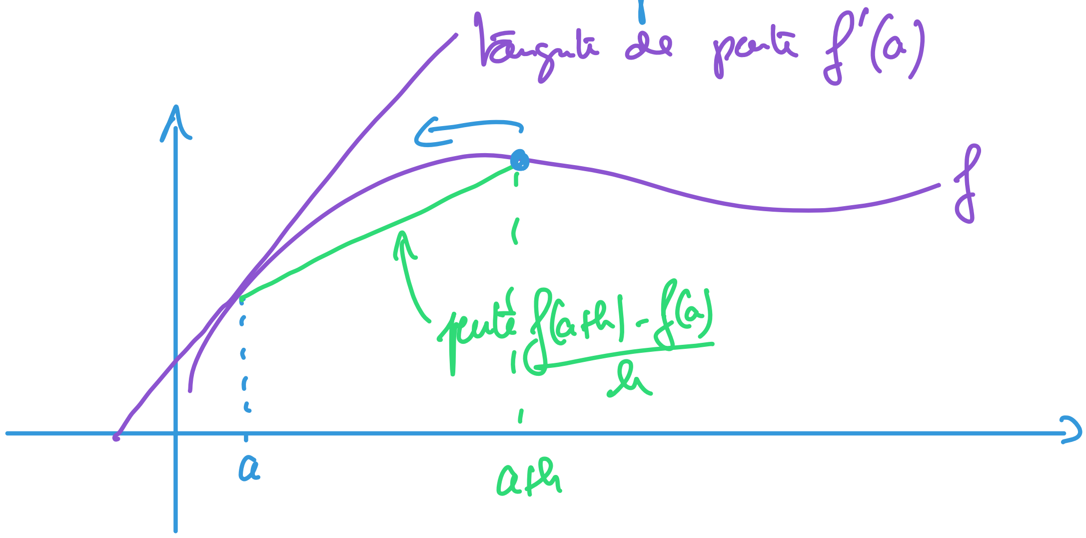
f lipschitzienne = "à croissance pas trop rapide".

- si f est lipschitzienne, alors elle est continue

4 Dérivabilité

1. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant la dérivabilité des fonctions ?
2. Y a-t-il des résultats concernant le calcul des dérivées ?
3. De classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, comment c'est défini ? Comment on le montre ?
4. Y a-t-il beaucoup de fonctions lipschitziennes ?

① • f dérivable en a <u>ssi</u> $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie en $h \to 0$



<u>ssi</u> f admet un $DL_1(a)$

$$f(a+h) = \underbrace{a_0}_{f(a)} + \underbrace{a_1}_{f'(a)} h + o(h)$$

⚠ Si f admet un $DL_2(a)$, ça ne dit rien quant à la dérivabilité seconde.

• Si f dérivable sur I ~~intervalle~~, alors f est continue

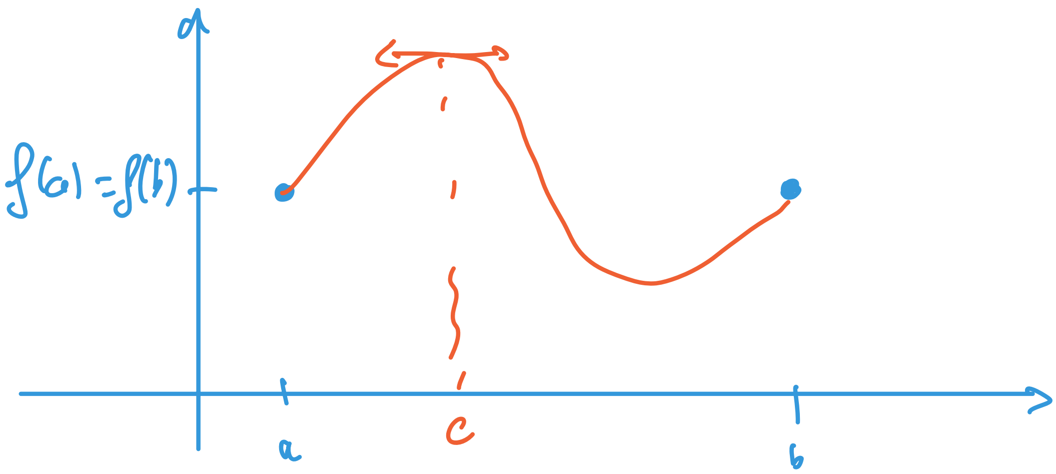
continue
lipschitzien
dérivable
$\mathcal{C}^1$
$\mathcal{C}^2$
$\mathcal{C}^\infty$

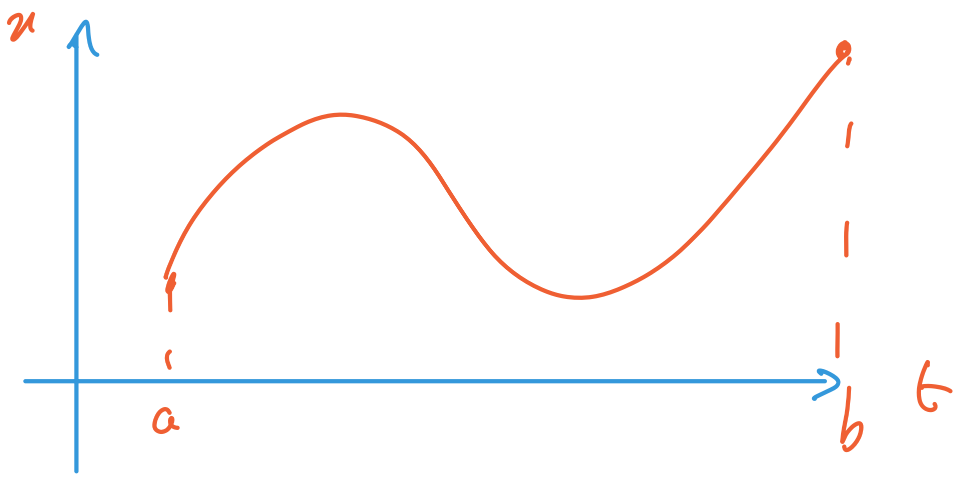
$\downarrow$ de + en + dur à satisfaire

- <u>Th de Rolle</u>

  Soit f dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$
  tq $f(a) = f(b)$

  <u>Alors</u> $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$



- 

I.A.F.

Si f est dérivable sur I intervalle,

$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq M$

alors $\forall x, y \in I \quad \left| \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M$

- Si $|f'| \leq M$, alors f est M-lipschitzienne.

- on peut combiner, sur un segment, le th des bornes atteintes à f' si f est $\mathcal{C}^1$ et l'IAF.

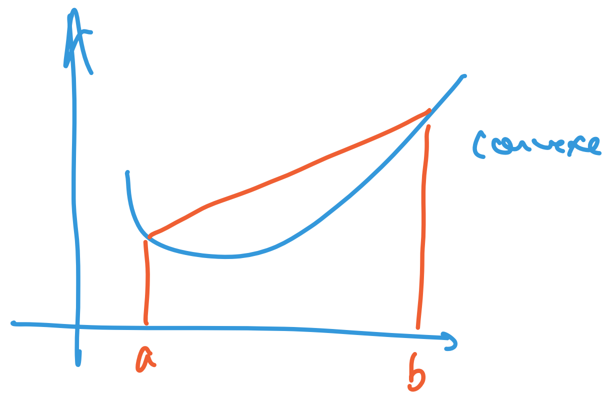
$(f \circ g)'$

$(f^{-1})'$

F^le^ de Leibniz

5 Convexité

1. Qu'est-ce qu'un intervalle de $\mathbb{R}$?
2. Qu'est-ce qu'un segment $[AB]$ dans le plan ?
3. Que signifie « f est convexe » ?
4. Caractérisations, propriétés des fonctions convexes ?
5. Qu'est-ce qu'une fonction concave ?



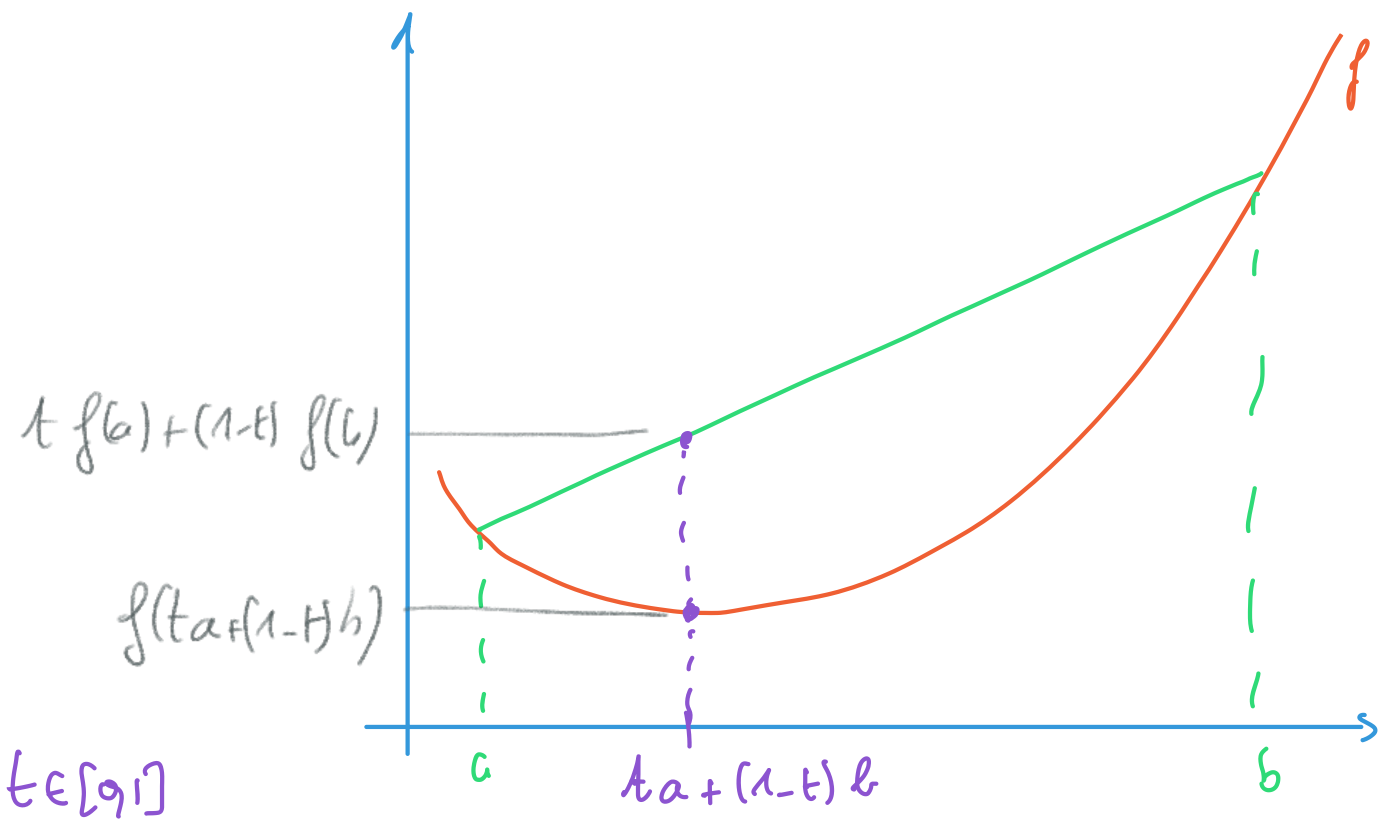
Ça signifie que c'est une "cuve".

- courbe est en dessous de ses cordes

  $\forall a, b \in I \ \forall t \in [0,1]$

  $$f(ta+(1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

- courbe est au-dessus de ses tangentes



- f' est croissante si f dérivable
- $f'' \geq 0$ si f deux fois dérivable