Cet après-midi : G1 commence par math
G2 commence par physique

Pour jeudi : 201.8, 201.9, 201.11

2 Analyse asymptotique

1. Ça sert à quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Que signifie négligeable ? dominé ? équivalent ?
3. Être équivalent, c'est pareil qu'avoir la même limite ?
4. Opérations ?
5. Connaissez-vous les développements limités usuels ?

(1) Étude fct / suite asymptote en 0, $\pm\infty$, a
approx. par fct polynomiale
formule magique qui donne le DL

Étude locale en remplaçant ce qu'on étudie
par qqch de plus simple
qui a le même comportement.

"Au voisinage de $+\infty$" Au voisinage de $x \to +\infty$
"Au voisinage de 0" ..

Au voisinage de $x \to +\infty$

$f(x) \ll g(x)$ signifie $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$

$f(x) = o(g(x))$

Au voisinage de $n \to +\infty$:

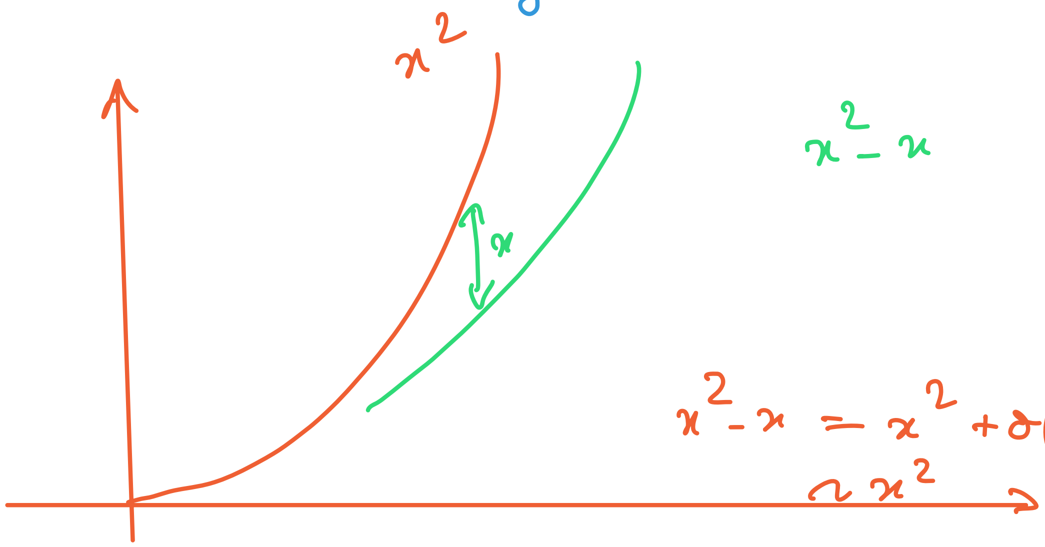
$f(n)$ est dominée par $g(n)$

$$f(n) = O(g(n))$$

signifie $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ bornée

$f(n)$ et $g(n)$ sont équivalents

signifie $\dfrac{f(x)}{g(n)} \longrightarrow 1$



$$x^2 - x = x^2 + o(x^2) \sim x^2$$

$$\boxed{f(n) \sim g(n) \quad \text{signifie} \quad f(n) = g(n) + o(g(n))}$$

$A \sim B$ $\quad$ $A = B$ à qqch de négligeable près

③ : Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors elles ont la même limite en a
(sous réserve d'avoir une limite)

Pas de réciproque :

Contrexemple : x et x^2 au voi de $+\infty$
(de 0)

Réciproque vraie si elles ont la même limite finie, non nulle.

En effet : Au voisinage de $x \to +\infty$

On suppose

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^*$

on a donc $f(x) = \ell + \underbrace{o(1)}_{\text{tend vers } 0}$

Si $g(x) \to \ell$, $g(x) = \ell + o(1)$

donc $f(x) = g(x) + o(1)$

or $f(x)$ même ordre de grandeur que 1

$f(x) = O(1)$

$1 = O(f(x))$

donc $o(1)$ désigne la même chose que $o(f(x))$

$\boxed{4}$ Opérations :

On peut faire le produit d'équivalents

Ex : Au voisinage de $x \to 0$

$$\cos(x)\,(e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \cancel{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \times x}$$

$$\cancel{= x - \frac{x^3}{2}}$$

$$\cancel{\cos(x)(e^x - 1) \sim x - \frac{x^2}{4}}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} 1 \,.\, x = x$$

⚠ On ne ~~peut pas additionner~~ les équivalents

$$\cos(x) + (e^x - 1) = 1 + o(1) + x + o(x)$$

$$= 1 + o(1)$$

$$\sim 1$$

$$\cos(x) = 1 + o(1)$$

$$e^x - 1 = x + o(x)$$

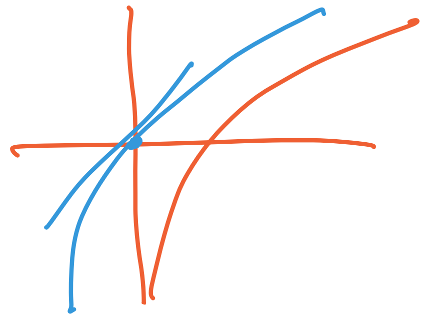
puissances : OK

Composition : on ~~peut pas~~

Au vois de 0

$\ln(\cos x)$ $\qquad\qquad\qquad \cos x = 1 + o(1)$

$= \ln(1 + \boxed{o(1)})$



$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

or $\ln(1+x) = x + o(x)$

$= o(1) + o(o(1))$

$= o(1)$

On répond en étant plus précis $\longrightarrow$ DL

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}\Big)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad + o\big(\underbrace{\qquad\qquad}\big)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sim -\frac{x^2}{2}$$

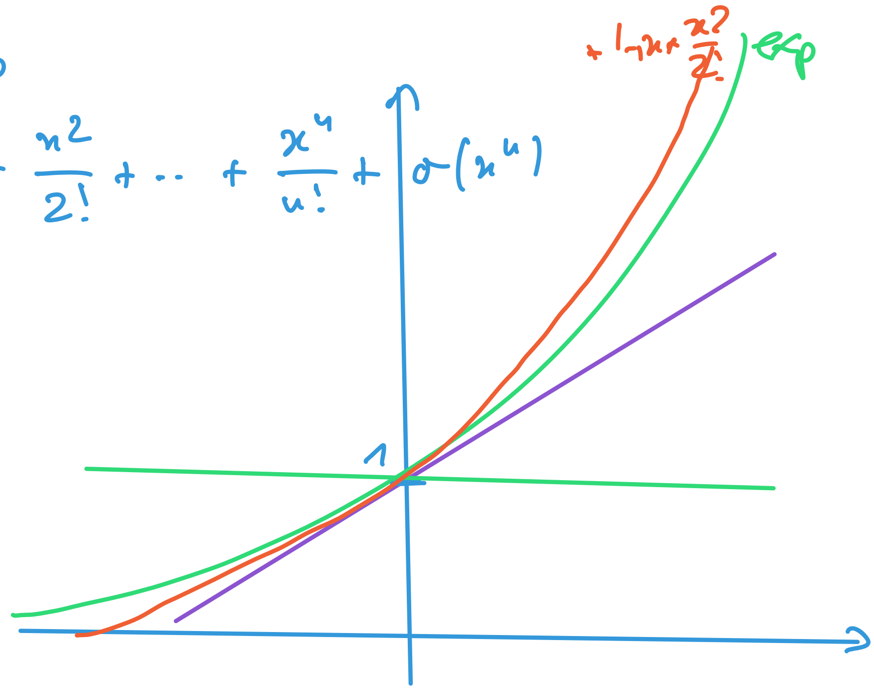
" $+o(1)$ " " + qqch qui tend vers 0 "

$o(2)$

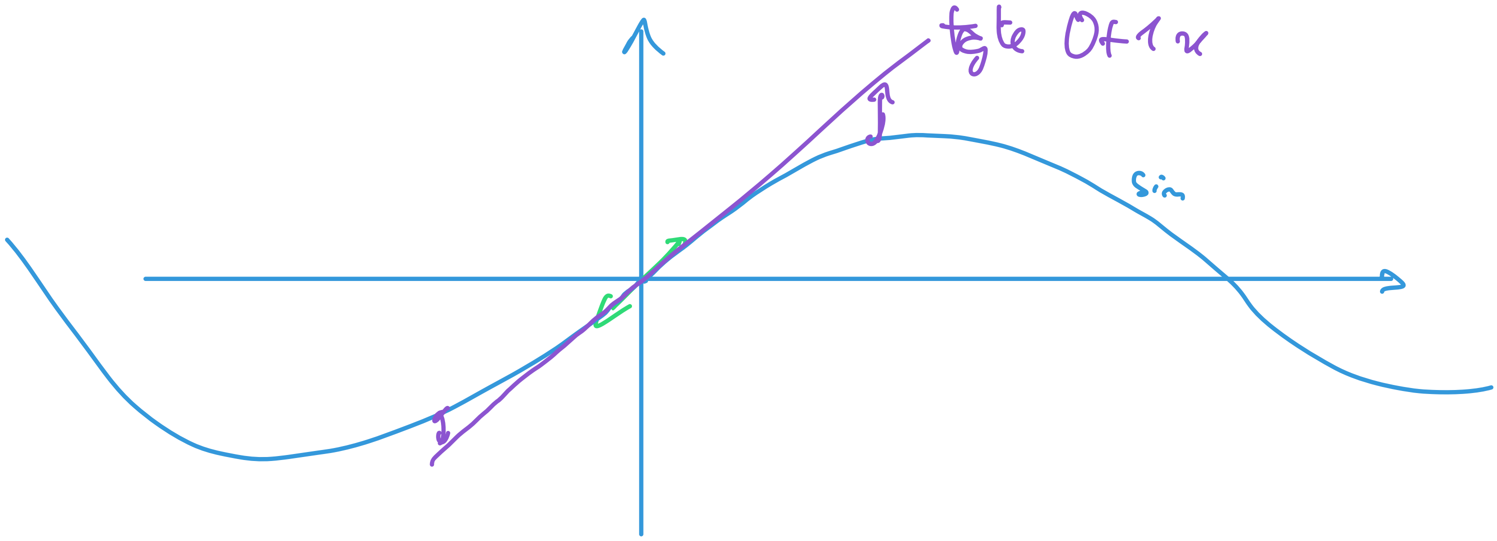
$o(2x)$ $o(x)$ $o(x\ln x)$

DL : Au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$



sin au voisinage de 0 :



$$\sin x = \overbrace{\underset{\text{valeur en 0}}{a_0} + a_1 x}^{\text{éq tgte en 0}} + \underbrace{a_2 x^2 + a_3 x^3}_{\text{donnent la position de la courbe par rapport à la tgte}} + o(x^3)$$

$$\sin x - (a_0 + a_1 x) = \underbrace{a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)}_{\text{donne un équivalent donc le signe local}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

(penser au graphe)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\| $$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \boxed{\cdots}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2.3} x^3$$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

n term au numérateur

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots$$

$$= 1 - x^2 + x^4 + \dots$$

on primitive

$$\operatorname{Arctan} x = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

constante de primitivation qui vaut Arctan 0

Opérations sur les DL (oui → ce sont des égalités)

×, +, ∘ quotient?

techniques.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Au voisinage de $x \to 0$

$\cos x \to 1$

donc $\cos x \neq 0$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{u \to 0}}$$

composée avec $\frac{1}{1-u}$

puis produit

Rmq : principe :

factoriser par le terme prépondérant

fait apparaître $1+u$ $(u \to 0)$

$\longrightarrow \frac{1}{1-u}$, $\ln(1+u)$ . . .

Opérations : primitivation

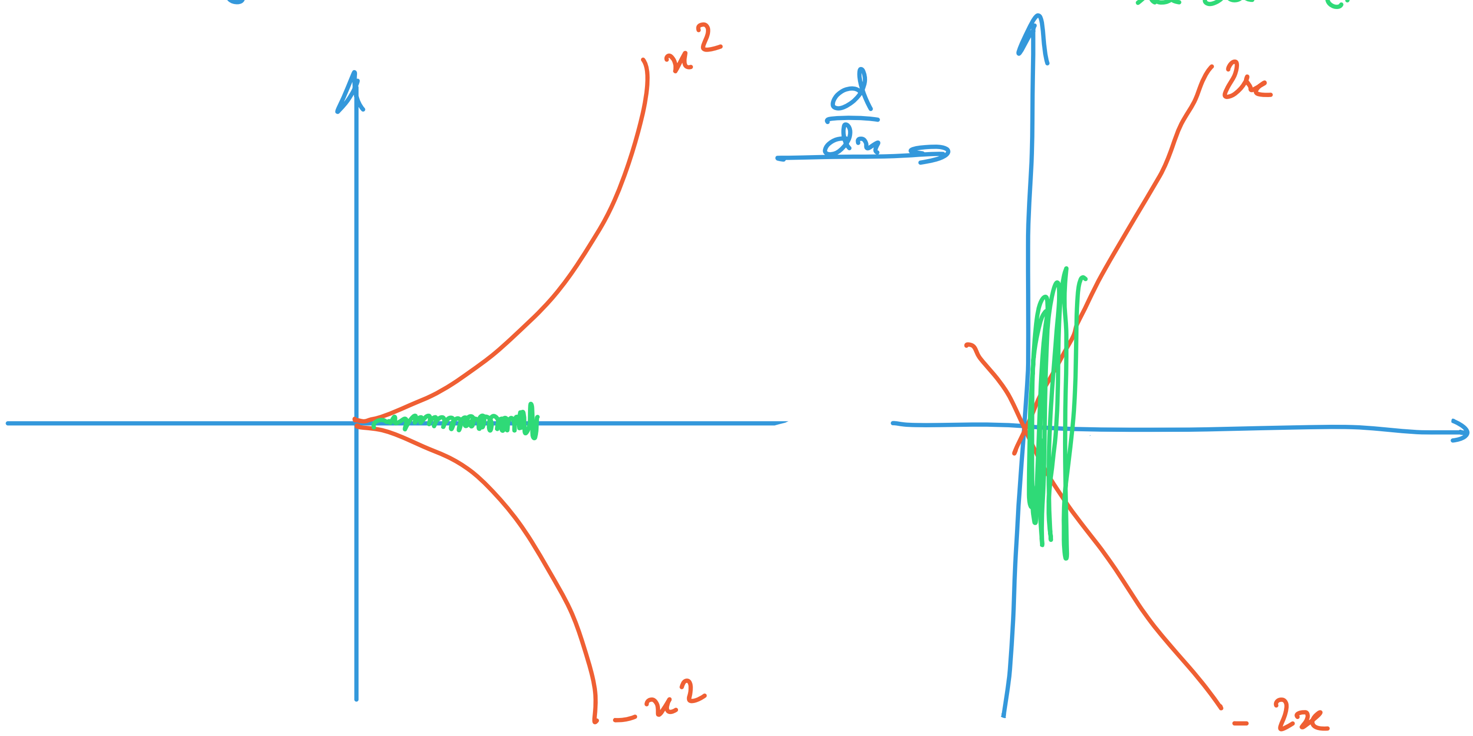
~~dérivation~~ NON

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

négligeable devant x^2
pas d'info sur les variations, sur la dérivée.

$\frac{d}{dx}$? $\downarrow$

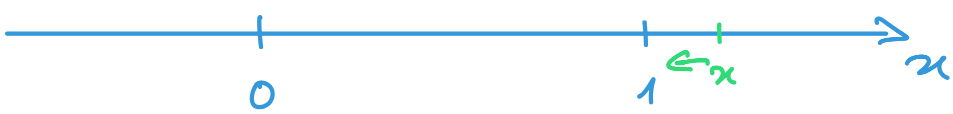
$$f'(x) \quad ? \quad a_1 + 2a_2 x + \dots$$



Et si on n'est pas en 0 ?

$DL_3(1)$ de $f(x)$

Au voisinage de $x \to 1$



$$x = 1 + h \quad \text{où } h \to 0$$

$$f(x) = f(1 + h)$$

$= \dots$

$= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)$

STOP

~~$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + o((x-1)^2)$~~

Si $x \xrightarrow{<} 1$, on a $x = 1 - h$ où $h \xrightarrow{>} 0$

En $+\infty$: ne pas "poser" de chgt de variable, le penser

Exemple : développement asymptotique à 3 termes de $\ln(1+x)$ en $+\infty$

Au voisinage de $x \to +\infty$

$$\ln(1+x) = \ln(x+1)$$

$$= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$= \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$