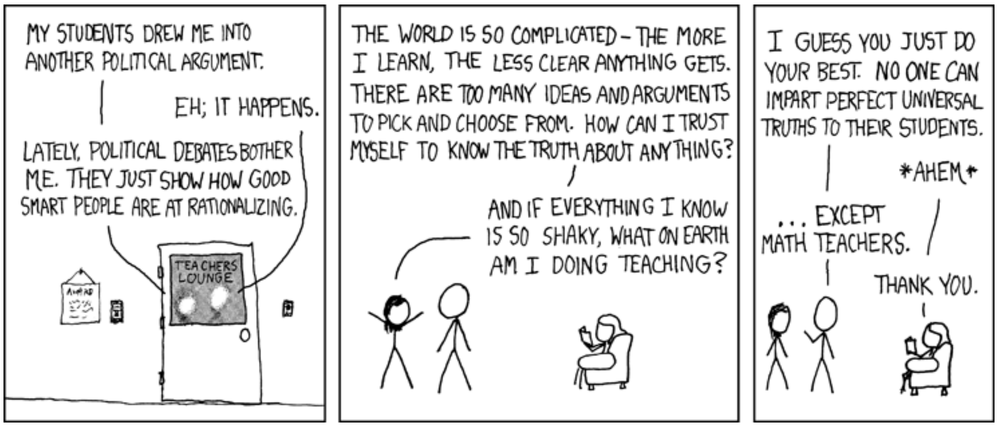
Pour moi : 201.1, 201.2, 201.3

Fonctions d'une variable réelle

Cours 3
1 Fonctions usuelles . . . 3
2 Analyse asymptotique . . . 4
3 Continuité . . . 5
4 Dérivabilité . . . 6
5 Convexité . . . 7
6 Intégration sur un segment . . . 8
7 Exercices et résultats classiques à connaître . . . 9
7.1 Le produit des termes pairs . . . 9
7.2 Une formule classique avec la fonction Arctan . . . 9
7.3 Suite définie de façon implicite . . . 9
7.4 Prolongement $\mathcal{C}^\infty$ . . . 9
7.5 Un calcul d'intégrale par changement de variable classique . . . 10
7.6 Intégrales de Wallis . . . 10
7.7 Lemme de Lebesgue . . . 10

Exercices 11
Exercices de mathématiques . . . 11
Petits problèmes d'entrainement . . . 15



https://xkcd.com/263

1 Fonctions usuelles

1. Quelles sont les fonctions usuelles ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? Leurs graphes ?
4. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

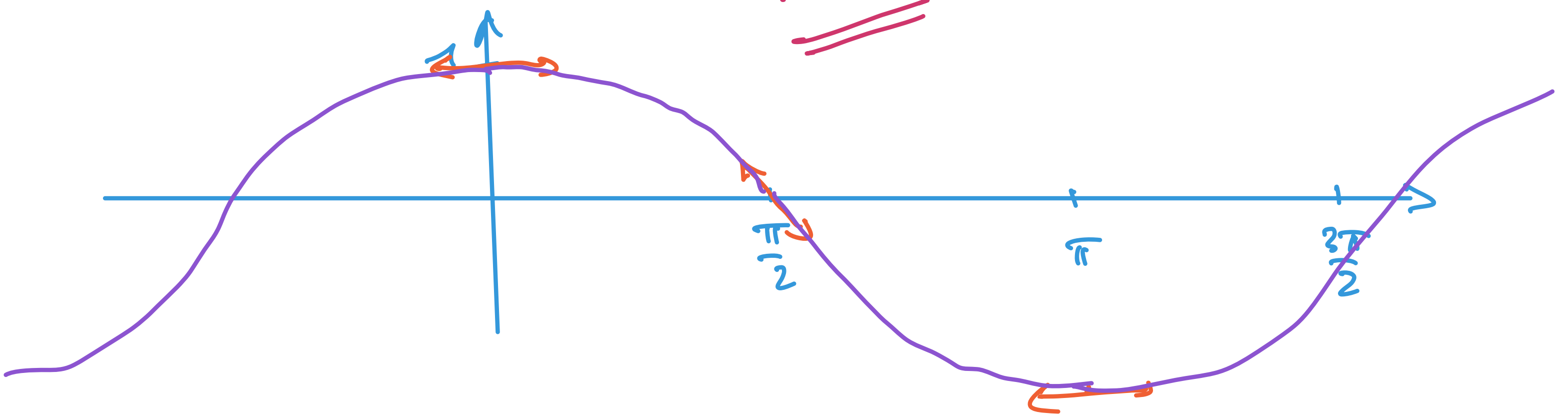
$[-1, 1]$

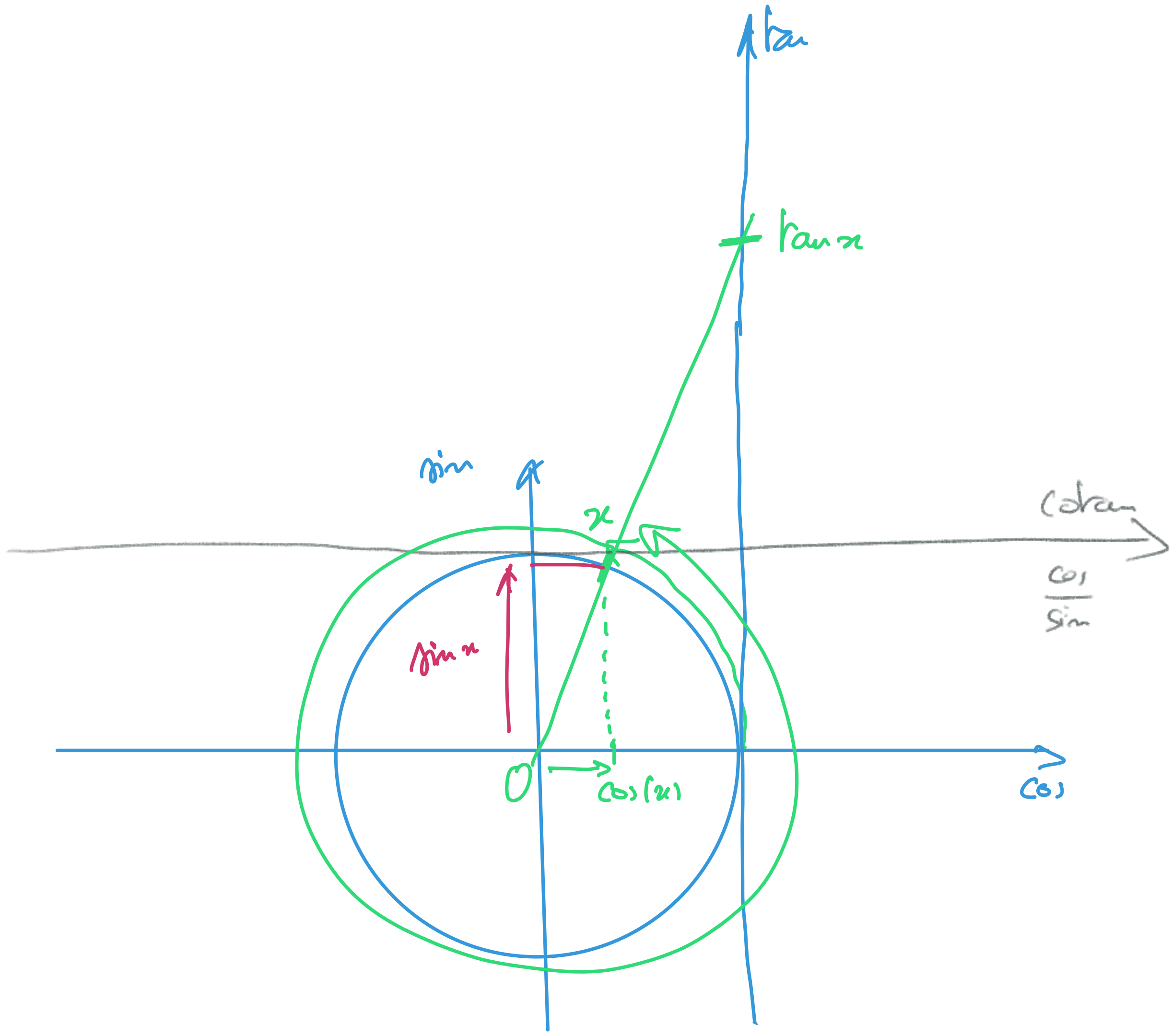
$[-2, 2]$

$\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$\cos' = -\sin$

~~La~~ une primitive est sin





tan
tan x
sin
cotan
x
cos
sin
sin x
O
cos(x)
cos

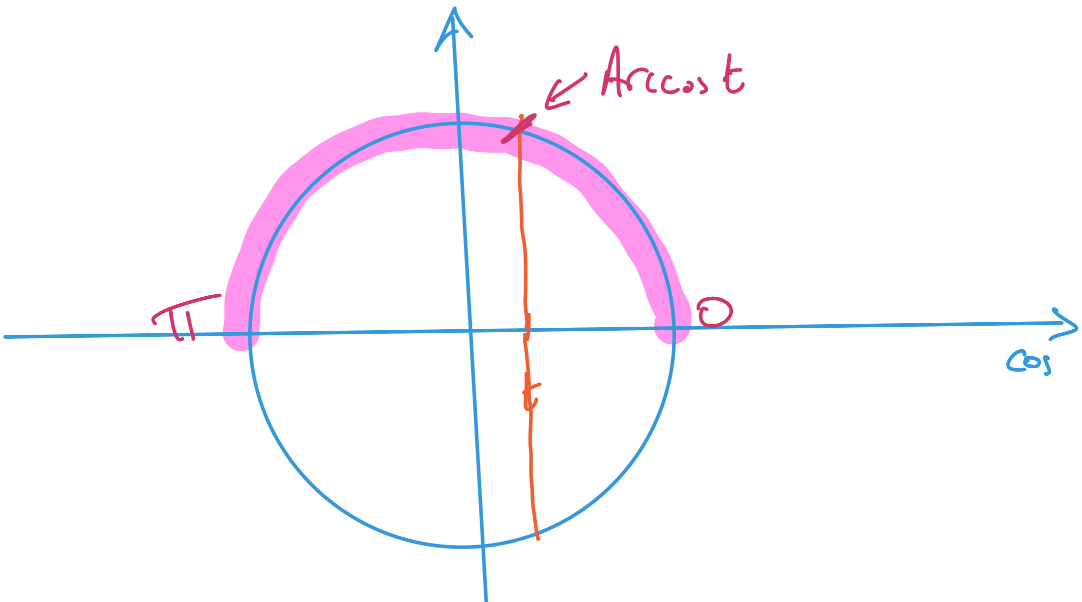
$\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto$ l'unique $x \in [0, \pi]$ tq $\cos x = t$

continue sur $[-1, 1]$

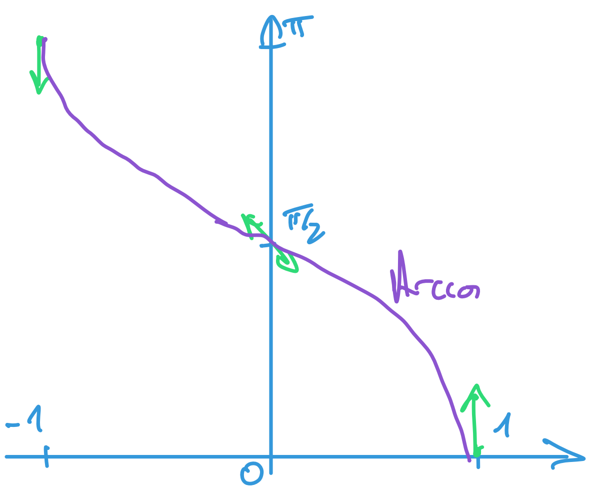
dérivable sur $]-1, 1[$

$$\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

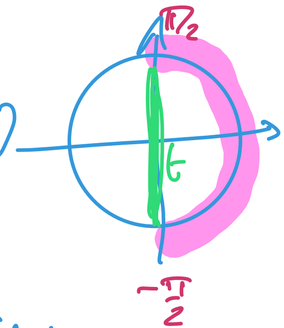


$$\mathrm{Arccos}'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

t	-1	0	1
Arccos'	$\Vert\ -\infty$	-1	$-\infty\ \Vert$
Arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

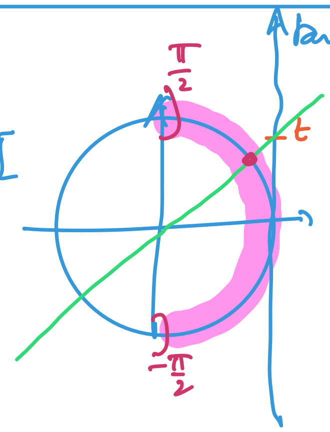


$$\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \text{l'unique } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tq } \sin x = t$$



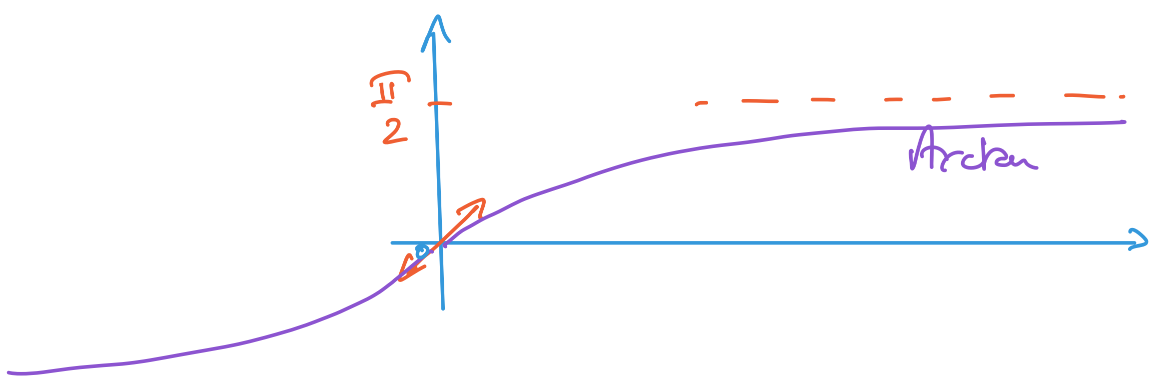
Arcsin dérivable sur $]-1,1[$, $\mathrm{Arcsin}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$t \longmapsto \text{l'unique } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tq } \tan x = t$$



$$\mathrm{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\mathrm{Arctan}\, t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$



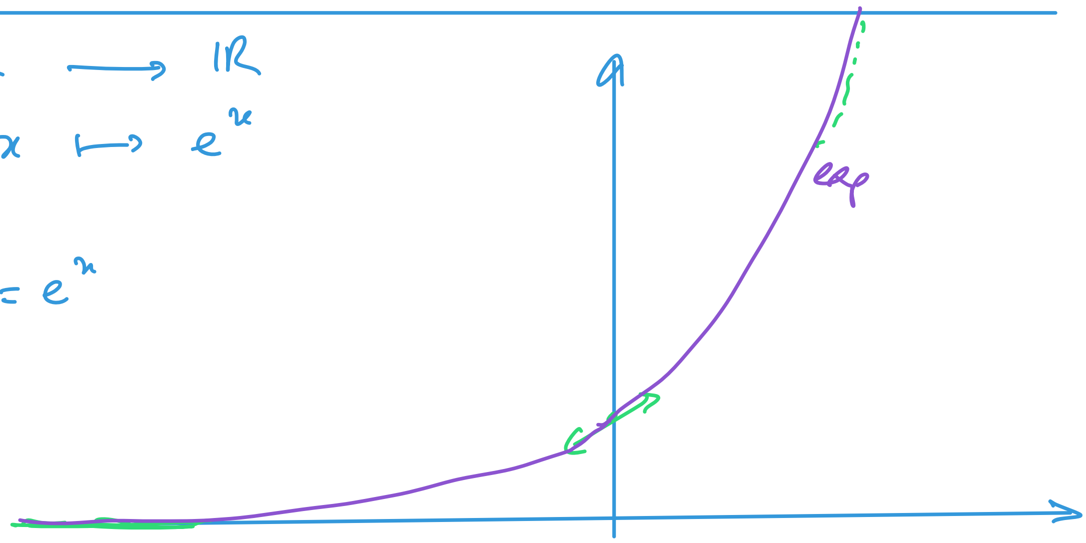
Rmq: $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Rmq: $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longmapsto e^x$

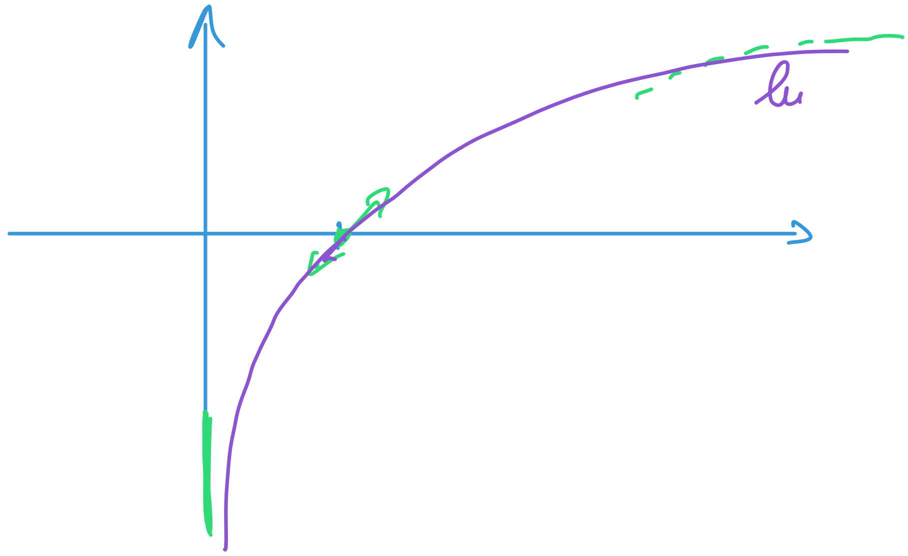
$\exp'(x) = e^x$



Pour $a > 0$ $\qquad a^x = e^{x \ln(a)}$

↑ exponentielle de base a

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}$



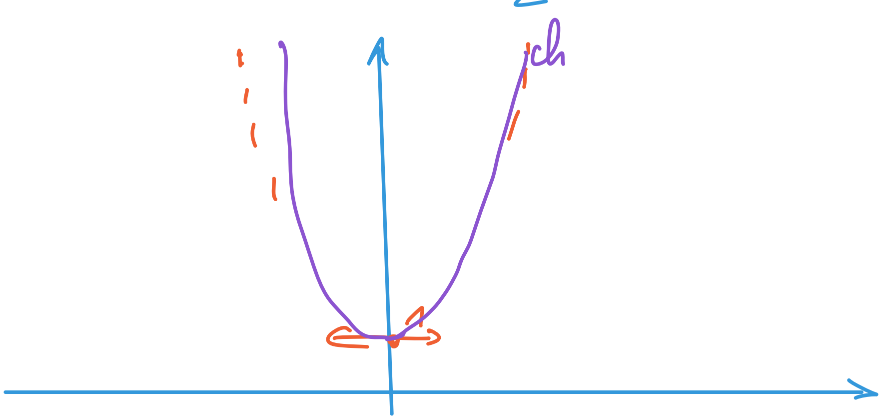
$\log_{10} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto$ l'unique $t \in \mathbb{R}$ tq $10^t = x$

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

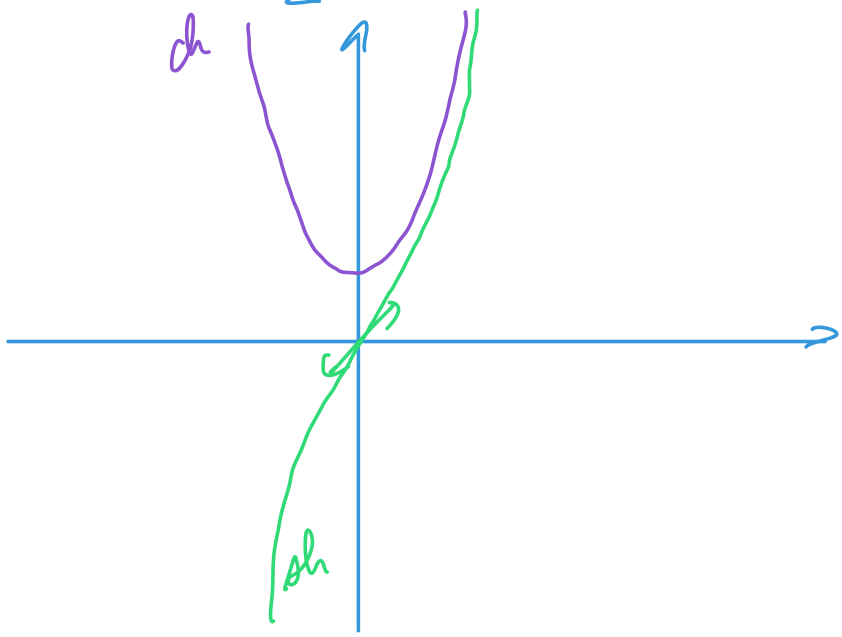
$ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad ch' = sh$

$t \longmapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2}$



$$sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$sh' = ch$



Au voisinage de $+\infty$: $ch\, t \sim$ suspense !

~~th tangente hyperbolique~~ $\cancel{th\, t = \frac{sh\, t}{ch\, t}}$

---

racine carrée : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto$ l'unique t positif tq $t^2 = x$

4 2 ou -2

$$\sqrt{} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x \longmapsto$ l'unique $t \geq 0$ tq $t^2 = x$

Tout complexe non nul admet 2 racines carrées

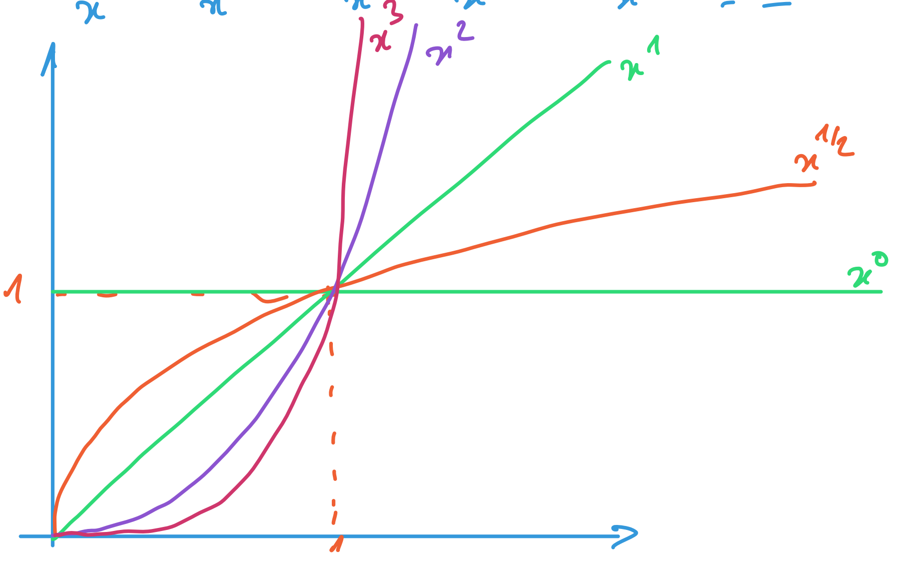
Les puissances :

puissance α : $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

pour $\alpha \in \mathbb{N}$, défini sur $\mathbb{R}$ par $x \times x \times \dots \times x$
pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ [...]

À savoir : représenter les différentes puissances les unes par rapport aux autres.

$x^0 \quad x^{1/2} \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad - -$



$f : A \longrightarrow B$

$x \qquad y$

$t \qquad x$

f surjective $\Leftrightarrow$ ~~$\forall x \in B,\ \exists y \in A$ tq $f(y) = x$~~

$\forall y \in B,\ \exists x \in A$ tq $y = f(x)$

f injective $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$