$$f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

- Fixons $x \in [0, +\infty[$

  * $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$

  * Pour t au voisinage de $+\infty$,

  $$0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t} \quad \text{où } t \mapsto e^{-t} \text{ intégrable en } +\infty$$

  Donc $f(x)$ existe comme intégrale absolument convergente

  * Notons que $f(x)$ est le reste d'une intégrale convergente (et donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$) et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme intégrale fonction de la borne du bas d'une fonction continue : $f'(x) = -e^{-x^2}$

- On vient de voir que f est continue sur $[0, +\infty[$

- Au voisinage de $x \to +\infty$:

Pour $x \geq 1$, $\forall t \in [x, +\infty[\subset [1, +\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

donc $0 \leq f(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt$

$= \left[-e^{-t} \right]_x^{+\infty}$

$= e^{-x}$ qui est intégrable en $+\infty$

Donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$

- On calcule :

$\int_0^{+\infty} 1 . f(x)\, dx$ par intégration par parties sous réserve de limites finies du crochet avec f et $x \mapsto x$ de classe $\mathcal{C}^1$

$= \underbrace{\left[x f(x) \right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ car } |x f(x)| \leq x e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} - \int_0^{+\infty} x f'(x)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$

$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty}$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$