

Montrer que, pour tout $n \geq 3$:

$$\varphi(n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(n) + \ln(2)}$$

On sait que $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|m \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

donc, en notant $p_1 < p_2 < \dots < p_q$ les facteurs premiers distincts et ordonnés de n , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n \prod_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &\geq n \prod_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) && \text{car } p_i \geq i+1 \\ & && \text{par récurrence} \\ &= n \prod_{i=1}^q \left(\frac{i}{i+1}\right) \\ &= \frac{n}{q+1} && \text{produit télescopique.} \end{aligned}$$

Avec
$$n = \prod_{i=1}^q p_i^{d_i} \geq \prod_{i=1}^q p_i \geq \prod_{i=1}^q 2 = 2^q$$

donc $q \leq \log_2(n)$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{n}{\log_2(n) + 1} \\ &= \frac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2} \end{aligned}$$

car $\log_2(n) = \frac{\ln n}{\ln 2}$
