(a) $\begin{cases} x+y \equiv 4 & [11] \\ xy \equiv 10 & [11] \end{cases}$

$\iff$ $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les racines dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ de $X^2 - \bar{4}X + \overline{10}$

or $X^2 - \bar{4}X + \overline{10} = (X-\bar{2})^2 + \bar{6}$

donc $X^2 - \bar{4}X + \overline{10} = 0 \iff (X-\bar{2})^2 = -\bar{6} = \bar{5}$

On calcule :

$$\bar{0}^2 = \bar{0}$$

$$(\overline{-1})^2 = \bar{1}^2 = \bar{1}$$

$$(\overline{-2})^2 = \bar{2}^2 = \bar{4}$$

$$(\overline{-3})^2 = \bar{3}^2 = \bar{9}$$

$$(\overline{-4})^2 = \bar{4}^2 = \overline{16} = \bar{5}$$

$$(\overline{-5})^2 = \bar{5}^2 = \overline{25} = \bar{3}$$

Donc
$$\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\bar{2} \pm \bar{4}\}$$
$$= \{\bar{6}, -\bar{2}\}$$
$$= \{\bar{6}, \bar{9}\}$$

$$\mathcal{S} = \{(6+11a, 9+11b),\ a,b \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cup \{(9+11a, 6+11b),\ a,b \in \mathbb{Z}\}$$

(b) $341 = 11 \times 31$

Par le théorème chinois, comme $11 \wedge 31 = 1$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/341\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \\ [a]_{341} & \longmapsto & ([a]_{11}, [a]_{31}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

On a donc :

$$\begin{cases} x+y \equiv 4 & [341] \\ xy \equiv 10 & [341] \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \equiv 4 & [11] \\ x+y \equiv 4 & [31] \\ xy \equiv 10 & [11] \\ xy \equiv 10 & [31] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y) \text{ solution de (a)} \\ x+y \equiv 4 \quad [31] \\ xy \equiv 10 \quad [31] \end{cases}$$

• $\begin{cases} x+y \equiv 4 & [31] \\ xy \equiv 10 & [31] \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les racines dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ de $X^2 - \bar{4}X + \overline{10}$

$$X^2 - \bar{4}X + \overline{10} = (X-\bar{2})^2 + \bar{6} = (X-\bar{2})^2 - \overline{25}$$

$$= (X-\bar{7})(X+\bar{3})$$

par intégrité de $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\bar{7}, -\bar{3}\} = \{\bar{7}, \overline{28}\}$

On a donc (x,y) sol $\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 & [11] \\ x \equiv 7 & [31] \\ y \equiv 9 & [11] \\ y \equiv 28 & [31] \end{cases}$ (S_1)

ou $\begin{cases} x \equiv 6 & [11] \\ x \equiv 28 & [31] \\ y \equiv 9 & [11] \\ y \equiv 7 & [31] \end{cases}$ (S_2)

ou $\begin{cases} x \equiv 9 & [11] \\ x \equiv 7 & [31] \\ y \equiv 6 & [11] \\ y \equiv 28 & [31] \end{cases}$ (S_3)

ou $\begin{cases} x \equiv 9 & [11] \\ y \equiv 28 & [31] \\ x \equiv 6 & [11] \\ y \equiv 7 & [31] \end{cases}$ (S_4)

- On remarque que

$$11 \times 17 = 187 = 186 + 1 \equiv 1 \quad [31]$$

donc, dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$, $\overline{11}^{-1} = \overline{17}$

$$31 \equiv 9 \quad [11] \quad \text{et} \quad 9 \times 5 = 45 \equiv 1 \quad [11]$$

donc, dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\overline{31}^{-1} = \overline{5}$

Donc $\begin{cases} z \equiv a & [11] \\ z \equiv b & [31] \end{cases}$

admet pour solution particulière

$$z_0 = a \times 31 \times 5 + b \times 11 \times 17$$
$$= 155\,a + 187\,b$$

et pour solutions $z_0 + 341\,\mathbb{Z}$

Par suite $S_1 \iff \begin{cases} x \equiv 155 \times 6 + 187 \times 7 & [341] \\ \quad \equiv 2239 & [341] \\ \quad \equiv 193 & [341] \\ y \equiv 155 \times 9 + 187 \times 28 & [341] \\ \quad \equiv 6631 & [341] \\ \quad \equiv 152 & [341] \end{cases}$

$S_2 \iff \begin{cases} x \equiv 152 & [341] \\ y \equiv 193 & [341] \end{cases}$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x \equiv 155 \times 6 + 187 \times 28 \quad [341] \\ \quad \equiv 6166 \quad [341] \\ \quad \equiv 28 \quad [341] \\ y \equiv 155 \times 9 + 187 \times 7 \quad [341] \\ \quad \equiv 2704 \quad [341] \\ \quad \equiv 317 \quad [341] \end{cases}$$

$$(S_3) \iff \begin{cases} x \equiv 317 \quad [341] \\ y \equiv 28 \quad [341] \end{cases}$$