Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left((X^2-1)^n\right)$$

(a) Montrer que L_n est un polynôme unitaire, de degré n.

(b) Vérifier que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(c) En déduire que L_n possède n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

(a) On note $K_n = (X^2-1)^n$ qui est de degré $2n$, unitaire

$= X^{2n} + R_n$ où $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

Alors, par récurrence, pour $k \in \{0, .., n\}$:

$$K_n^{(k)} = (2n)(2n-1)\dots(2n-k+1)\,X^{2n-k} + R_n^{(k)}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-k)!} X^{2n-k} + R_n^{(k)}$$

en particulier :

$$K_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n + \underbrace{R_n^{(n)}}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

donc <u>L_n est unitaire, de degré n</u>.

(b) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On calcule, par intégration par parties successives :

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt$$

$$= \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} K_n^{(n)}(t)\; Q(t)\; dt$$

$$= \frac{n!}{(2n)!} \underbrace{\left[K_n^{(n-1)}(t)\, Q(t) \right]_{-1}^{1}}_{\text{nul}} - \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} K_n^{(n-1)}(t)\, Q'(t)\, dt$$

car 1 et -1 sont racines de multiplicité n de K_n

$$= - \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} K_n^{(n-1)}(t)\, Q'(t)\, dt$$

$$= [\dots]$$

$$= (-1)^k \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} K_n^{(n-k)}(t)\; Q^{(k)}(t)\; dt$$

après k intégrations par parties $0 \leq k \leq n$

$$= [\dots]$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} K_n(t)\; \underbrace{Q^{(n)}(t)}_{=0}\; dt \quad \text{car } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

$$= 0$$

Remarque : on n'est pas loin de parler de produit scalaire et d'orthogonalité à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Voire d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(c) Notons $a_1, \dots, a_p$ les racines de L_n de multiplicité impaire, et qui sont dans $]-1,1[$. On a $p \leq n$. On suppose $p < n$.

Notons $Q = (X-a_1)\dots(X-a_p) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Par (b), $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = 0$

Intégrale nulle d'une fonction continue, et de signe constant (car polynomiale, dont les racines sont toutes de multiplicité paire).

Donc $\forall t \in]-1,1[$, $L_n(t)\,Q(t) = 0$

Ce qui est en contradiction avec le fait que $L_n Q$ est un polynôme unitaire, de degré $n+p$.

C'est donc que $p=n$, et donc que les n racines de L_n sont dans $]-1,1[$, de multiplicité impaire, donc simples.

Remarque : on peut aussi établir ce résultat en appliquant le théorème de Rolle à K_n et à ses dérivées successives.