Factorisation de $X^n - 1$

(a) Dans $\mathbb{C}[X]$, on connaît les racines n-ièmes de l'unité

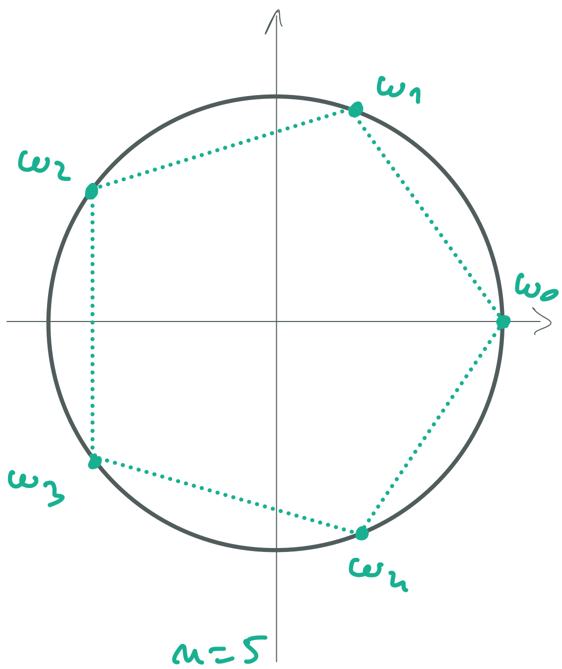
$$U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

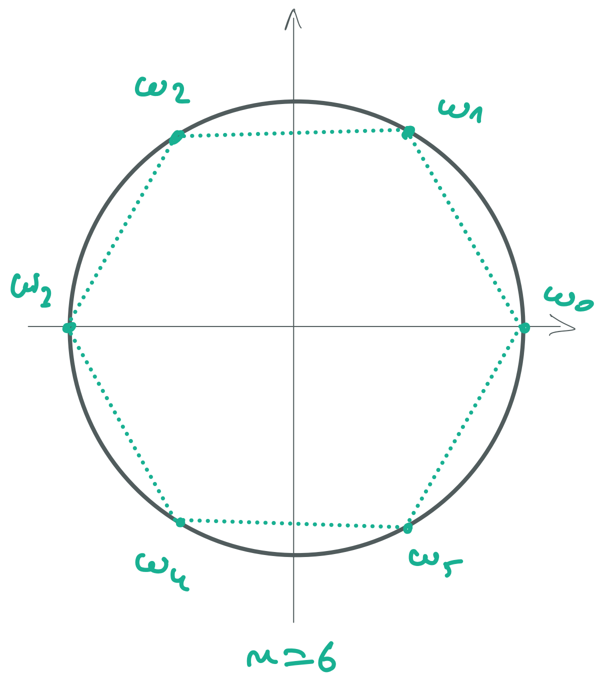
noté ω_k, ou encore ω^k avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

qui sont les n racines simples de $X^n - 1$, donc

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

(b)





On va utiliser la factorisation précédente en regroupant les facteurs $(X - \alpha)$ et $(X - \bar{\alpha})$, car les racines complexes non réelles de $X^n - 1$ sont racines d'un polynôme réel, donc sont deux à deux conjuguées.

Et $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$

Discutons selon la parité de n

- Si $n = 2p$

$$X^{2p} - 1 = \prod_{k=0}^{2p-1} (X - \omega_k)$$

$$= (X-1) \prod_{k=1}^{p-1} (X - \omega_k) \cdot (X - \omega_p) \prod_{k=p+1}^{2p-1} (X - \omega_k)$$

avec $\omega_p = e^{i \frac{2p\pi}{2p}} = -1$

on pose $k = 2p - k'$, k' de $p-1$ à 1

et $\omega_{2p-k'} = e^{i\frac{4p\pi}{2p}} e^{-i\frac{2k'\pi}{2p}}$

$$= \overline{\omega_{k'}}$$

$$= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} (X - \omega_k) \prod_{k=1}^{p-1} (X - \overline{\omega_k})$$

$$= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{p} + 1\right)$$

- Si $n = 2p+1$

$$X^{2p+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2p} (X - \omega_k)$$

$$= (X-1) \prod_{k=1}^{p} (X - \omega_k) \prod_{k=p+1}^{2p} (X - \omega_k)$$

de même.

$$= (X-1) \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{p} + 1\right)$$