(a) L'intersection d'une famille de sous-corps est un sous-corps. Donc, en notant

$$\mathbb{Q}(A) = \bigcap_{\substack{K \text{ sous-corps de } \mathbb{C} \\ A \subset K \\ \mathbb{Q} \subset K}} K$$

on définit un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient A et $\mathbb{Q}$, et qui est inclus dans tous les sous-corps ayant la même propriété : c'est le plus petit.

(b) <u>Analyse:</u>

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ contient $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et tous les rationnels, et il est stable par produit et somme, donc il contient $\sqrt{6}$ et tous les $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

On a montré :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$$

<u>Réciproquement</u>

Montrons que $K = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, ce qui justifiera que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset K$ par (a).

- K contient bien $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$

- * K est inclus dans $\mathbb{C}$

  * K contient 0, est stable par $+$ et par passage à l'opposé, donc c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$

  * K est stable par produit. En effet,

$$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6})\times(e+f\sqrt{2}+g\sqrt{3}+h\sqrt{6})$$

$$\begin{aligned}
&= ae+2bf+3cg+6dh \\
&\quad + (af+be)\sqrt{2} + (ag+ce)\sqrt{3} + (ah+de)\sqrt{6} \\
&\quad + (bg+cf)\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{3}}_{\sqrt{6}} \\
&\quad + (bh+df)\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{6}}_{2\sqrt{3}} \\
&\quad + (ch+dg)\underbrace{\sqrt{3}\sqrt{6}}_{3\sqrt{2}} \\
&= (ae+2bf+3cg+6dh) \\
&\quad + (af+be+3ch+3dg)\sqrt{2} \\
&\quad + (ag+ce+2bh+2df)\sqrt{3} \\
&\quad + (ah+de+bg+cf)\sqrt{6} \\
&\in K
\end{aligned}$$

* K est stable par passage à l'inverse pour un élément non nul :

idée 1. On considère $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$

On cherche $e+f\sqrt{2}+g\sqrt{3}+h\sqrt{6}$ tq

$$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6})\times(e+f\sqrt{2}+g\sqrt{3}+h\sqrt{6})=1$$

ce qui donne un système, pas très drôle, de 4 équations à 4 inconnues.

idée 2 : Soit $t=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\in K$, $t\neq 0$.

On considère
$$\varphi_t : \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & t\times x \end{array}$$

Alors φ_t est un endomorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $K=\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$, engendré par 4 éléments donc de dimension finie ≤ 4.

Si $x\in \mathrm{Ker}\,\varphi_t$, $tx=0$

et donc $x=0$

car c'est une égalité dans $\mathbb{C}$, corps, donc intègre.

Ainsi φ_t est injective et endomorphisme d'un ev de dimension finie, donc bijective.

Par suite 1 admet par φ_t un antécédent dans K, donc l'inverse de t est dans K.