Normalisateur d'un élément

(a) Soit $x \in G$, $N(x) = \{g \in G,\ gxg^{-1} = x\}$

<u>Rmq</u> : $N(x)$ est l'ensemble des $g \in G$ qui commutent avec x

- $N(x) \subset G$

- $1 x 1^{-1} = 1 x 1 = x$ donc $1 \in N(x)$

  (On a noté 1 le neutre de $\cdot$ dans G)

- Soit $g, h \in N(x)$.

$$(gh)x(gh)^{-1} = g h x h^{-1} g^{-1}$$
$$= g x g^{-1} \quad \text{car } h \in N(x)$$
$$= x \quad \text{car } g \in N(x)$$

donc $gh \in N(x)$

- Soit $g \in N(x)$

$$g^{-1} x (g^{-1})^{-1} = g^{-1} (g x g^{-1}) g \quad \text{car } g \in N(x)$$
$$= (g^{-1} g) x (g^{-1} g)$$
$$= x$$

donc $g^{-1} \in N(x)$

On a montré que <u>$N(x)$ est un sous-groupe de G</u>

(b) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

- Réflexive :

Pour tout $x \in G$,

$$x = 1\, x\, 1^{-1} \quad \text{donc} \quad x \,\mathcal{R}\, x$$

- Symétrique :

Soit $x, y \in G$ tq $x \,\mathcal{R}\, y$

ie $\exists g \in G$ tq $y = g x g^{-1}$

donc $g^{-1} y g = g^{-1} g x g^{-1} g$

$= x$ avec $g^{-1} \in G$

On a montré que $y \,\mathcal{R}\, x$

- Transitive :

Soit $x, y, z \in G$ tq $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$

ie $\exists g, h \in G$ tq $y = g x g^{-1}$ et $z = h y h^{-1}$

Donc $z = h (g x g^{-1}) h^{-1}$

$= (hg)\, x\, (hg)^{-1}$ où $hg \in G$

On a montré que $x \,\mathcal{R}\, z$.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(c) Soit $x \in G$ fixé pour cette question.

On note $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Cl(x) \\ g & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$

- φ est bien définie ($gxg^{-1} \in Cl(x) \ \forall g \in G$)
- φ est surjective par définition de $Cl(x)$.

Soit alors $y \in Cl(x)$: $\exists g \in G$ tq $y = gxg^{-1} = \varphi(g)$

On veut connaître les autres antécédents de y par φ :

h antécédent de y par φ

$$\begin{aligned} &\iff y = \varphi(h) \\ &\iff gxg^{-1} = hxh^{-1} \\ &\iff x = (g^{-1}h)x(g^{-1}h)^{-1} \\ &\iff g^{-1}h \in N(x) \end{aligned}$$

Or $h \longmapsto g^{-1}h$ est bijective (de réciproque $h \mapsto gh$)

donc il y a autant d'antécédent de y par φ que d'éléments dans $N(x)$.

On écrit alors la partition suivante :

$$G = \bigcup_{\substack{\text{disjointe} \\ y \in Cl(x)}} \{ h \text{ tq } \varphi(h) = y \}$$

$$\text{donc } \operatorname{Card} G = \sum_{y \in Cl(x)} \operatorname{Card}\{h \text{ tq } \varphi(h) = y\}$$

$$= \sum_{y \in Cl(x)} \operatorname{Card}(N(x))$$

$$= \operatorname{Card}(N(x)) \times \sum_{y \in Cl(x)} 1$$

$$= \operatorname{Card}(N(x)) \times \operatorname{Card}(Cl(x))$$

(d) • D'après (c), $\forall x$, $\operatorname{Card}(Cl(x)) \mid \operatorname{Card}(G)$

donc $\exists \beta$ tq $\operatorname{Card}(Cl(x)) = p^{\beta}$.

• Si $\beta = 0$, c'est que $Cl(x) = \{x\}$ ie $\forall g \in G$, $x = g x g^{-1}$

donc $x \in C(G)$

• On écrit alors la partition :

$$G = \bigcup_{\text{disjoints}} \text{Classes d'équivalence de } R$$

$$= \bigcup_{\text{disjoints}} \text{Classes d'équivalence de } R \text{ de cardinal } 1$$

$$\bigcup_{\text{disjoints}} \bigcup_{\text{disjoints}} \text{classes d'équivalences de } R \text{ de cardinal} > 1$$

Donc

$$\text{Card } G = \sum_{\substack{\text{Classes d'éq.} \\ \text{de card } 1}} 1 + \sum_{\substack{\text{Classes d'éq.} \\ \text{de card} > 1}} \text{Card(classe d'éq)}$$

$$= \text{Card}(C(G)) + \sum_{\substack{\text{Classes d'éq.} \\ \text{de card} > 1}} \text{Card(classe d'éq)}$$

Ainsi $\text{Card}(C(G)) = p^{\alpha} - \sum_{\substack{\text{Classes d'éq.} \\ \text{de card} > 1}} \text{Card(classe d'éq)}$

p^{β} où $\beta \geq 1$

est un <u>multiple non nul de p</u>.

Par suite, $\text{Card}(C(G)) \neq 1$

donc $\underline{C(G) \neq \{1\}}$