

(a) Il y a plusieurs choses à montrer.

- Montrons que ϕ est à valeurs dans G

Soit $g \in G$.

* Pour $h \in G$, on calcule:

$$\begin{aligned}\phi(g^{-1}) \circ \phi_g(h) &= \phi(g^{-1})(\phi_g(h)) \\ &= g^{-1} * (g * h) \\ &= (g^{-1} * g) * h \\ &= h\end{aligned}$$

$$\text{donc } \phi(g^{-1}) \circ \phi_g = \text{Id}_G$$

$$* \text{ De même } \phi_g \circ \phi(g^{-1}) = \text{Id}_G$$

* On en déduit que ϕ_g est inversible, et $(\phi_g)^{-1} = \phi(g^{-1})$.

- Montrons que ϕ est un morphisme de groupes:

Soit $g_1, g_2 \in G$.

Pour $h \in G$:

$$\begin{aligned}(\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(h) &= \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) \\ &= g_1 * (g_2 * h) \\ &= (g_1 * g_2) * h \\ &= \phi(g_1 * g_2)(h)\end{aligned}$$

Donc $\phi(g_1) \circ \phi(g_2) = \phi(g_1 * g_2)$

Ainsi ϕ est un morphisme de groupes.

- Montrons que ϕ est injectif

Soit $g \in \text{Ker } \phi$.

Alors $\phi(g) = \text{Id}_G$, ie $\forall h \in G, g * h = h$.

En particulier, avec $h=e$, $g * e = e$

ie $g=e$

Ainsi $\text{Ker } \phi = \{e\}$ donc ϕ injectif

- (b) • Comme $\text{Card } G = n$, G est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$u : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow G$$

$$k \longmapsto u(k)$$

- Par suite, il y a un isomorphisme "naturel" entre $\mathcal{S}(G)$ et $\mathcal{S}_n$:

$$\psi : \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}_n$$

$$\sigma \longmapsto u^{-1} \circ \sigma \circ u$$

Ça veut le coup d'y réfléchir un peu: appliquer $u^{-1} \circ \sigma \circ u$,

c'est partir de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, prendre le $u(k) \in G$ associé,

lui appliquer σ pour rester dans G et chercher le numéro

de $\sigma(u(k))$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ grâce à u^{-1} .

- Considérons la composée:

$$G \xrightarrow{\phi} \mathcal{U}(G) \xrightarrow{\psi} \mathcal{U}_n$$

Alors $\psi \circ \phi$ est un morphisme injectif de groupes, qui induit un isomorphisme sur son image, qui est un sous-groupe de $\mathcal{U}_n$.

(c) • Prenons $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, noté additivement.

On choisit dans ce cas: ce: $[1, 4] \rightarrow G$ par exemple

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & \overline{1} \\ 2 & \mapsto & \overline{2} \\ 3 & \mapsto & \overline{3} \\ 4 & \mapsto & \overline{0} \end{array}$$

$$\text{On a } \phi(\overline{0}): G \longrightarrow G \quad \text{et } \psi \circ \phi(\overline{0}) = \underset{\sigma_0}{\text{Id}_{[1,4]}}$$

$$\overline{h} \longmapsto \overline{h+0} = \overline{h}$$

$$\phi(\overline{1}): G \longrightarrow G \quad \text{et } \psi \circ \phi(\overline{1}) = \underset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\overline{h} \longmapsto \overline{h+1}$$

c'est le cycle $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$

$$\phi(\overline{2}): G \longrightarrow G \quad \text{et } \psi \circ \phi(\overline{2}) = \underset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\overline{h} \longmapsto \overline{h+2}$$

$$\phi(\overline{3}): G \longrightarrow G \quad \text{et } \psi \circ \phi(\overline{3}) = \underset{\sigma_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\overline{h} \longmapsto \overline{h+3}$$

Alors $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\} = \text{Im}(\psi \circ \phi)$ est un sous-groupe de S_4 , isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Remarque: En fait, $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle \tau \rangle$ cyclique

$$\text{donc } \text{Im}(G) = \langle \psi \circ \phi(\tau) \rangle$$

$$= \langle \sigma_1 \rangle \text{ est cyclique}$$

$$\text{et on a bien } \sigma_2 = \sigma_1^2$$

- On travaille de même: on considère $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, muni de la loi produit (cartésien) notée additivement.

$$\text{On choisit } u: [1, 2, 3, 4] \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

$$1 \longmapsto (\bar{0}, \bar{0})$$

$$2 \longmapsto (\bar{1}, \bar{0})$$

$$3 \longmapsto (\bar{0}, \bar{1})$$

$$4 \longmapsto (\bar{1}, \bar{1})$$

$$\text{On a : } \phi(\bar{0}, \bar{0}) = \text{Id}_G \text{ donc } \psi \circ \phi(\bar{0}, \bar{0}) = \text{Id}_{[1, 4]} \quad \text{'' } \sigma_0$$

$$\phi(\bar{1}, \bar{0}) : G \longrightarrow G$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto (\bar{a} + 1, \bar{b})$$

$$\text{donc } \psi \circ \phi(\bar{1}, \bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 2)(3 \ 4) = \sigma_1$$

produit de 2 transpositions

$$\phi(\bar{0}, \bar{1}): G \longrightarrow G$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto (\bar{a}, \overline{b+1})$$

$$\text{donc } \psi \circ \phi(\bar{0}, \bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 4) = \sigma_2$$

produit de 2 transpositions

$$\phi(\bar{1}, \bar{1}): G \longrightarrow G$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto (\overline{a+1}, \overline{b+1})$$

$$\text{donc } \psi \circ \phi(\bar{1}, \bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 4)(2\ 3) = \sigma_3$$

produit de 2 transpositions

Alors $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \text{Im}(\psi \circ \phi)$ est un sous-groupe de S_4 , isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.