

(a) • Vérifions que ϕ est à valeurs dans $\mathcal{G}$

Soit $g \in G$.

Pour $h \in G$, on calcule:

$$\begin{aligned} * \quad \phi_g \circ \phi_{(g^{-1})}(h) &= g * (g^{-1} * h * (g^{-1})^{-1}) * g^{-1} \\ &= (g * g^{-1}) * h * (g * g^{-1}) \\ &= e * h * e \\ &= h \end{aligned}$$

$$\text{donc } \phi_g \circ \phi_{(g^{-1})} = \text{Id}_G$$

$$* \text{ De même } \phi_{(g^{-1})} \circ \phi_g = \text{Id}_G$$

$$* \text{ Donc } \phi_g \text{ est inversible, et } (\phi_g)^{-1} = \phi_{(g^{-1})}$$

On a montré que ϕ est à valeurs dans $\mathcal{G}$.

• Vérifions que ϕ est un morphisme de groupes

Soit $g_1, g_2 \in G$.

Pour $h \in G$,

$$\begin{aligned} (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(h) &= \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) \\ &= g_1 * (g_2 * h * g_2^{-1}) * g_1^{-1} \\ &= (g_1 * g_2) * h * (g_1 * g_2)^{-1} \\ &= \phi_{(g_1 * g_2)}(h) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{\phi(g_1) \circ \phi(g_2) = \phi(g_1 * g_2)}$$

Ainsi ϕ est un morphisme de groupes.

(b) On détermine le noyau de ϕ : $\swarrow$ Noyau de $(G, \circ)$

$$g \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(g) = \text{Id}_G$$

$$\Leftrightarrow \forall h \in G, \phi_g(h) = h$$

$$\Leftrightarrow \forall h \in G, g * h * g^{-1} = h$$

$$\Leftrightarrow \forall h \in G, g * h = h * g \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \text{ } xg \text{ à droite} \nearrow *g^{-1} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow g \in C(G)$$

$\uparrow$
le centre de G : les éléments de G

qui commutent avec tous les autres.