(a) Il y a plusieurs choses à montrer.

- **Montrons que ϕ est à valeurs dans $\mathfrak{S}$**

Soit $g \in G$.

$*$ Pour $h \in G$, on calcule :

$$
\begin{aligned}
\phi_{(g^{-1})} \circ \phi_g (h) &= \phi_{(g^{-1})}\left(\phi_g(h)\right) \\
&= g^{-1} * (g * h) \\
&= (g^{-1} * g) * h \\
&= h
\end{aligned}
$$

donc $\phi_{(g^{-1})} \circ \phi_g = Id_G$

$*$ De même $\phi_g \circ \phi_{(g^{-1})} = Id_G$

$*$ On en déduit que ϕ_g est inversible, et $(\phi_g)^{-1} = \phi(g^{-1})$.

- **Montrons que ϕ est un morphisme de groupes :**

Soit $g_1, g_2 \in G$.

Pour $h \in G$:

$$
\begin{aligned}
\left(\phi(g_1) \circ \phi(g_2)\right)(h) &= \phi_{g_1}\left(\phi_{g_2}(h)\right) \\
&= g_1 * (g_2 * h) \\
&= (g_1 * g_2) * h \\
&= \phi(g_1 * g_2)(h)
\end{aligned}
$$

Donc $\phi(g_1) \circ \phi(g_2) = \phi(g_1 * g_2)$

Ainsi ϕ est un morphisme de groupes.

- Montrons que ϕ est injectif

Soit $g \in \operatorname{Ker} \phi$.

Alors $\phi(g) = \mathrm{Id}_G$, ie $\forall h \in G,\ g * h = h$.

En particulier, avec $h = e$, $g * e = e$

ie $g = e$

Ainsi $\operatorname{Ker} \phi = \{e\}$ donc ϕ injectif

(b) • Comme $\operatorname{Card} G = n$, G est en bijection avec $[\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} u : [\![1, n]\!] &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto u(k) \end{aligned}$$

- Par suite, il y a un isomorphisme "naturel" entre $\mathfrak{S}(G)$ et $\mathfrak{S}_n$:

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{S}(G) &\longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ \sigma &\longmapsto u^{-1} \circ \sigma \circ u \end{aligned}$$

Ça vaut le coup d'y réfléchir un peu : appliquer $u^{-1} \circ \sigma \circ u$, c'est partir de $k \in [\![1, n]\!]$, prendre le $u(k) \in G$ associé, lui appliquer σ pour rester dans G et chercher le numéro de $\sigma(u(k))$ dans $[\![1, n]\!]$ grâce à u^{-1}.

- Considérons la composée :

$$G \xrightarrow{\phi} \mathfrak{S}(G) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{S}_n$$

Alors $\psi \circ \varphi$ est un morphisme injectif de groupes, qui induit un isomorphisme sur son image, qui est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

(c) • Prenons $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, noté additivement.

On choisit dans ce cas : $e : [\![1,4]\!] \longrightarrow G$ par exemple

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \overline{1} \\ 2 &\longmapsto \overline{2} \\ 3 &\longmapsto \overline{3} \\ 4 &\longmapsto \overline{0} \end{aligned}$$

On a $\phi(\overline{0}) : \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ \overline{h} &\longmapsto \overline{h+0} = \overline{h} \end{aligned}$ et $\psi \circ \phi(\overline{0}) = Id_{[\![1,4]\!]}$ $= \sigma_0$

$\phi(\overline{1}) : \begin{aligned} G &\longmapsto G \\ \overline{h} &\longmapsto \overline{h+1} \end{aligned}$ et $\psi \circ \phi(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1$

c'est le cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$

$\phi(\overline{2}) : \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ \overline{h} &\longmapsto \overline{h+2} \end{aligned}$ et $\psi \circ \phi(\overline{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2$

$\phi(\overline{3}) : \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ \overline{h} &\longmapsto \overline{h+3} \end{aligned}$ et $\psi \circ \phi(\overline{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_3$

Alors $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\} = \mathrm{Im}(\varphi \circ \phi)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Remarque: En fait, $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle$ cyclique

donc $\mathrm{Im}(G) = \langle \varphi \circ \phi(\bar{1}) \rangle$

$= \langle \sigma_1 \rangle$ est cyclique

et on a bien $\sigma_k = \sigma_1^k$

- On travaille de même : on considère $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, muni de la loi produit (cartésien) notée additivement.

On choisit $u : [\![1, 2, 3, 4]\!] \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto (\bar{0}, \bar{0}) \\ 2 &\longmapsto (\bar{1}, \bar{0}) \\ 3 &\longmapsto (\bar{0}, \bar{1}) \\ 4 &\longmapsto (\bar{1}, \bar{1}) \end{aligned}$$

On a : $\phi(\bar{0}, \bar{0}) = \mathrm{Id}_G$ donc $\varphi \circ \phi(\bar{0}, \bar{0}) = \underbrace{\mathrm{Id}_{[\![1,4]\!]}}_{\sigma_0}$

$$\phi(\bar{1}, \bar{0}) : \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto (\overline{a+1}, \bar{b}) \end{aligned}$$

donc $\varphi \circ \phi(\bar{1}, \bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$= (1\ 2)(3\ 4) = \sigma_1$

produit de 2 transpositions

$$\phi(\bar{0},\bar{1}) : G \longrightarrow G$$

$$(\bar{a},\bar{b}) \longmapsto (\bar{a}, \overline{b+1})$$

$$\text{donc} \quad \psi \circ \phi(\bar{0},\bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 4) = \sigma_2$$

produit de 2 transpositions

$$\phi(\bar{1},\bar{1}) : G \longrightarrow G$$

$$(\bar{a},\bar{b}) \longmapsto (\overline{a+1}, \overline{b+1})$$

$$\text{donc} \quad \psi \circ \phi(\bar{1},\bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 4)(2\ 3) = \sigma_3$$

produit de 2 transpositions

Alors $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\} = \mathrm{Im}(\psi \circ \phi)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.