(a) • <u>Vérifions que ϕ est à valeurs dans $\mathfrak{S}$</u>

Soit $g \in G$.

Pour $h \in G$, on calcule :

* $\phi_g \circ \phi_{(g^{-1})}(h) = g * (g^{-1} * h * (g^{-1})^{-1}) * g^{-1}$

$$= (g * g^{-1}) * h * (g * g^{-1})$$

$$= e * h * e$$

$$= h$$

donc $\phi_g \circ \phi_{(g^{-1})} = Id_G$

* De même $\phi_{(g^{-1})} \circ \phi_g = Id_G$

* Donc ϕ_g est inversible, et $(\phi_g)^{-1} = \phi_{(g^{-1})}$

On a montré que ϕ est à valeur dans $\mathfrak{S}$.

• <u>Vérifions que ϕ est un morphisme de groupes</u>

Soit $g_1, g_2 \in G$.

Pour $h \in G$,

$$(\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(h) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h))$$

$$= g_1 * (g_2 * h * g_2^{-1}) * g_1^{-1}$$

$$= (g_1 * g_2) * h * (g_1 * g_2)^{-1}$$

$$= \phi_{(g_1 * g_2)}(h)$$

Donc $\underline{\phi(g_1) \circ \phi(g_2) = \phi(g_1 * g_2)}$

Ainsi ϕ est un morphisme de groupes.

(b) On détermine le noyau de ϕ: Neutre de $(\mathfrak{S}, \circ)$

$$
\begin{aligned}
g \in \operatorname{Ker} \phi &\iff \phi(g) = Id_G \\
&\iff \forall h \in G,\ \phi_g(h) = h \\
&\iff \forall h \in G,\ g * h * g^{-1} = h \\
&\iff \forall h \in G \quad g * h = h * g \qquad {*g} \text{ à droite} \quad {*g^{-1}} \\
&\iff g \in C(G)
\end{aligned}
$$

le centre de G : les éléments de G qui commutent avec tous les autres.