Existence d'une racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

- $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc par le théorème spectral et la caractérisation spectrale de la positivité :

  $\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tq $\quad S = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{notée } D} P^T$

- On note $R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$

- On a R symétrique (car $R^T = R$)

  positive (car ses v.p $\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n}$ sont positives)

  tq $R^2 = S$ (c'est un calcul direct)

Ainsi R convient.

Unicité de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

- Soit $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ polynôme d'interpolation de Lagrange tq

  $\forall i \quad L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

Remarque : si les vp ne sont pas distinctes, il n'y a que r conditions d'interpolation et $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$

On calcule : $L(S) = L(PDP^T)$

$= P\,L(D)\,P^T$ justif classique, polynôme de matrice

$= P \begin{pmatrix} L(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & L(\lambda_n) \end{pmatrix} P^T$ justif classique

$= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$

$= R$

- Notons T une matrice convenant : $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $T^2 = S$

Comme $T^2 = S$, T commute avec S, donc avec $Q(S) = R$

donc T commute avec R.

Mais T et R sont diagonalisables par le th spectral,

donc par exercice classique (qu'il faut connaître !)

elles sont co-diagonalisables :

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D_1, D_2 diagonales à coeffs ≥ 0

tq : $T = Q D_1 Q^{-1}$ et $R = Q D_2 Q^{-1}$

Mais comme $T^2 = R^2$, on a $D_1^2 = D_2^2$.

Par positivité des coeff diagonaux, $D_1 = D_2$ et donc $\underline{T = R}$