b3. • f_k est de degré k par b1 et $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_k)$

donc $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_k$ tq $f_k = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_k e_k$

et comme $e_0, \dots, e_k$ est une base ON de $\mathbb{R}_k[X]$,

chaque $\lambda_i = \langle f_k | e_i \rangle$

• Par le processus d'orthonormalisation, pour $i \leq k-1$

$\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e^i) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^i)$

donc en particulier $e_i \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^i)$

$\subset \mathrm{Vect}(f_k)^{\perp}$ par b2

• Il reste $f_k = \lambda_k e_k$