(a) En effectuant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre $O(x^n)$, on a :

$$\sqrt{1+x} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)}{(n-1)!}x^n}_{\text{noté } P_n(x)} + O(x^n)$$

(b) On a
$$P_n^2(x) = \left(\sqrt{1+x} + O(x^n)\right)^2 = 1 + x + O(x^n)$$
donc
$$P_n^2(x) - x - 1 = O(x^n)$$

Notons α la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme $P_n^2(X) - X - 1$. On peut écrire :

$$P_n^2(X) - X - 1 = X^\alpha Q(X) \qquad \text{où } Q(0) \neq 0$$

Par suite, $x^\alpha Q(x) = O(x^n)$ donc $x^{\alpha-n} Q(x) = O(1)$
et donc $x^{\alpha-n} Q(0) = O(1)$

Donc nécessairement $\alpha - n \geqslant 0$

Bref 0 est racine d'ordre au moins n
et donc $\underline{X^n \mid P_n^2(X) - X - 1}$.

(c) On note $\underline{g = P_n(f)}$. Comme X^n annule f et $X^n \mid P_n^2(X) - X - 1$, $P_n^2(X) - X - 1$ annule f donc

$$\underline{g^2 = f + Id_E}.$$

(d) E est un e.v. sur $\mathbb{C}$ donc χ_f est scindé.
Comme f admet λ pour unique valeur propre, c'est que $\chi_f(X) = (X-\lambda)^n$. Par le th de Cayley-Hamilton, on a donc

$$(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$$

On note alors μ l'une des racines carrées de λ : $\mu^2 = \lambda$

On pose $g = \mu P_n\left(\frac{1}{\mu^2}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)\right)$

Puisque $\frac{1}{\mu^2}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ vérifie l'hypothèse de (c),

on a :
$$\begin{aligned} g^2 &= \mu^2 \; P_n\left(\frac{1}{\mu^2}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)\right)^2 \\ &= \mu^2 \left[\frac{1}{\mu^2}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Id}_E\right] \quad \text{par (c)} \\ &= f - \lambda \mathrm{Id}_E + \mu^2 \mathrm{Id}_E \\ &= f. \qquad \text{car } \mu^2 = \lambda. \end{aligned}$$