(a) • On cherche les valeurs propres de $M$ :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X & 0 & -2 \\ 0 & 0 & X & -3 \\ -1 & -2 & -3 & X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -1 \\ X & X & 0 & -2 \\ -X & 0 & X & -3 \\ 0 & -2 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$$

$$= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X & -4 \\ 0 & -2 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ 0 & X & -4 \\ -2 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad \text{dév. } C_1.$$

$$= X \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3}X & X & -4 \\ 0 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - \frac{2}{3} C_2$$

$$= X^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & X & -\frac{14}{3} \\ 0 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3} L_1$$

$$= X^2 (X^2 - 14)$$ dev $C_1$

$$= X^2 (X - \sqrt{14})(X + \sqrt{14})$$

Donc $Sp(M) = \{0, -\sqrt{14}, +\sqrt{14}\}$

avec $0$ vp. double., les autres simples.

- Recherche des espaces propres :

* On remarque que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans $\operatorname{Ker} M$

et non colinéaires.

Comme $0$ est v.p. double, $\dim E_0(M) \leq 2$

Ainsi $E_0(M) = \operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

* $$M - \sqrt{14} I_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{14} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{14} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{14} & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Notant $C_1, C_2, C_3, C_4$ les colonnes de cette matrice, on a :

$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{14} \\ -2\sqrt{14} \\ -3\sqrt{14} \\ 14 \end{pmatrix} = -\sqrt{14}\, C_4$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -\sqrt{14} \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{14}}(M)$.

Comme $\sqrt{14}$ est vp simple, $\dim E_{\sqrt{14}}(M) = 1$

et donc $E_{\sqrt{14}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -\sqrt{14} \end{pmatrix}$

* De même $E_{-\sqrt{14}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \sqrt{14} \end{pmatrix}$

- $\chi_M$ est scindé et chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre. Donc $M$ est diagonalisable :

$M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{14} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -\sqrt{14} & \sqrt{14} \end{pmatrix}$

(b) On a, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} M^n &= P D^n P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(0, 0, 14^{n/2}, (-1)^n 14^{n/2}) P^{-1} \\ &= 14^{n/2} P \operatorname{diag}(0, 0, 1, (-1)^n) P^{-1} \\ &= 14^{n/2} (A + (-1)^n B) \end{aligned}$$

en notant $A = P E_{33} P^{-1}$
$B = P E_{44} P^{-1}$

---

(c) Notons $C(M) := \{ N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ tq } MN = NM \}$ le commutant de $M$

On a : $N \in C(M) \iff MN = NM$

$$\begin{aligned} &\iff P D P^{-1} N = N P D P^{-1} \\ &\iff D P^{-1} N P = P^{-1} N P D \\ &\iff \underbrace{P^{-1} N P}_{\text{notée } N'} \in C(D) \end{aligned}$$

le commutant de $D$

<u>Analyse</u> : Si $N'$ commute avec $D$, alors les espaces propres de $D$ $E_0(D)$, $E_{\sqrt{14}}(D)$ et $E_{-\sqrt{14}}(D)$ sont stables par $N'$ donc

$$N' = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c} a & c & \\ b & d & (0) \\ \hline & & e \\ & (0) & \quad f \end{array} \end{pmatrix}$$

<u>Synthèse</u> : Si $N'$ est de la forme précédente, alors par calcul direct $N'D = DN'$

<u>Conclusion</u> : $C(M) = \left\{ P \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} a & c \\ b & d \\ \hline \end{array} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} e & \\ & f \end{matrix} \end{pmatrix} P^{-1},\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dim. 6, engendré par $PE_{11}P^{-1}, PE_{12}P^{-1}, \dots, PE_{44}P^{-1}$

(d) <u>Analyse</u> : On suppose que $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ satisfait $X^2 = M$.

Notons $X = PX'P^{-1}$. Alors $X' \in C(D)$

et $X'$ satisfait $X'^2 = D$

Donc $X' = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} a & b \\ c & d \\ \hline \end{array} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} e & \\ & f \end{matrix} \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 & (0) \\ (0) & \begin{matrix} e^2 & \\ & f^2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} \sqrt{14} & \\ & -\sqrt{14} \end{matrix} \end{pmatrix}$

En particulier $f^2 = -\sqrt{14}$, ce qui est impossible.

<u>Ccl</u> : Il n'y a pas de solution à $X^2 = M$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$