$$\phi(f) = \frac{1}{2}(f\circ p + p\circ f)$$

$$\phi^2(f) = \frac{1}{4}\left(f\circ p + p\circ f\circ p + p\circ f\circ p + p\circ f\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\circ p + 2\, p\circ f\circ p + p\circ f\right)$$

$$\phi^3(f) = \frac{1}{8}\left(f\circ p + 2\, p\circ f\circ p + p\circ f\circ p + p\circ f\circ p + 2\,p\circ f\circ p + p\circ f\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(f\circ p + 6\, p\circ f\circ p + p\circ f\right)$$

On annule les $p\circ f\circ p$:

$$3\phi^2(f) - 2\phi^3(f) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)(f\circ p + p\circ f)$$

$$= \phi(f)$$

Donc $P = 2X^3 - 3X^2 + X$ est annulateur de ϕ

$= X(X-1)(2X-1)$ scindé simple donc ϕ diagonalisable

et $Sp(\phi) \subset \{0, 1, \frac{1}{2}\}$

Espaces propres:

- $\phi(f) = 0 \iff \frac{1}{2} f\circ p + \frac{1}{2} p\circ f = 0$

  C'est vrai lorsque (C.S.) $\begin{cases} \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, f \\ \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, p \end{cases}$

  Soit $\mathcal{B}$ base adaptée à $\mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$

  $$\begin{cases} \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, f \\ \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, p \end{cases} \iff \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $\dim E_0(\phi) \geq (\dim \operatorname{Ker} p)^2$

- $\phi(f) = f \iff \frac{1}{2} f \circ p + \frac{1}{2} p \circ f = f$

  c'est vrai lorsque (CS) $\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f \end{cases}$

  <u>En effet</u> : $\frac{1}{2} p \circ f(x) = \frac{1}{2} p(f(x)) = \frac{1}{2} f(x)$ car $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$

  $$\frac{1}{2} f \circ p(x) = \frac{1}{2} f(x - (x - p(x)))$$
  $$= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(\underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p})$$
  $$= \frac{1}{2} f(x)$$

$$\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f \end{cases} \iff \operatorname{Mat}(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

donc $\dim E_1(\phi) \geq (\dim \operatorname{Im} p)^2$

- $\phi(f) = \frac{1}{2} f \iff f \circ p + p \circ f = f$

  C'est vrai lorsque $\begin{cases} \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} f \\ \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \end{cases}$ $\qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 0 \end{array}\right)$

  ou alors lorsque $\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} p \\ \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f \end{cases}$ $\qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

donc $\dim E_{1/2}(\phi) \geq 2 \dim \operatorname{Im} p \times \dim \operatorname{Ker} p$

Mais comme la somme des 3 dim fait $n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$,

c'est qu'il y a partout égalité.