(a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\operatorname{tr}(X + \operatorname{tr}(X) A) = \operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(X) . \operatorname{tr}(A) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \operatorname{tr}(X)(1 + \operatorname{tr}(A))$$

(b) Analyse : On suppose que $X + \operatorname{tr}(X) A = B$.

Alors, en prenant la trace :

$$\operatorname{tr}(X)(1 + \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B)$$

- Si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, alors $\operatorname{tr}(X) = \dfrac{\operatorname{tr}(B)}{1 + \operatorname{tr}(A)}$

  et donc $X = B - \dfrac{\operatorname{tr}(B)}{1 + \operatorname{tr}(A)} A$

- Si $\operatorname{tr}(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(B) \neq 0$

  X n'existe pas

- Si $\operatorname{tr}(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(B) = 0$, l'égalité ci-avant ne donne pas d'information.

  On a $X = B + \lambda A$, où $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque : L'ensemble $B + \operatorname{Vect}(A) = \{ B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{K} \}$ est le translaté de la droite vectorielle engendrée par A (si $A \neq 0$).

Synthèse :

- Si $tr(A) \neq -1$, $X = B - \dfrac{tr(B)}{1+tr(A)} A$ satisfait :

$$X + tr(X) A = B$$

donc c'est l'unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ B - \dfrac{tr(B)}{1+tr(A)} A \right\}$

- Si $tr(A) = -1$ et $tr(B) \neq 0$

Il n'y a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

- Si $tr(A) = -1$ et $tr(B) = 0$

Pour $X = B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$X + tr(X) A = B + \lambda A + (\underbrace{tr(B)}_{0} + \lambda \underbrace{tr(A)}_{-1}) A$$

$$= B$$

donc X est solution de l'équation :

$\mathcal{S} = B + Vect(A)$