(a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{tr}(X + \mathrm{tr}(X)A) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(X).\mathrm{tr}(A)$$

par linéarité

$$= \mathrm{tr}(X)(1+\mathrm{tr}(A))$$

(b) <u>Analyse</u> : On suppose que $X + \mathrm{tr}(X)A = B$.

Alors, en prenant la trace :

$$\mathrm{tr}(X)(1+\mathrm{tr}(A)) = \mathrm{tr}(B)$$

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors $\mathrm{tr}(X) = \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}$

  et donc $X = B - \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)} A$

- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$

  X n'existe pas

- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$, l'égalité ci-avant ne donne pas d'information.

  On a $X = B + \lambda A$, où $\lambda \in \mathbb{K}$

<u>Remarque</u> : L'ensemble $B + \mathrm{Vect}(A) = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est le translaté de la droite vectorielle engendrée par A (si $A \neq 0$).

Synthèse :

- Si $tr(A) \neq -1$, $X = B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)} A$ satisfait :

$$X + tr(X) A = B$$

donc c'est l'unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)} A \right\}$

- Si $tr(A) = -1$ et $tr(B) \neq 0$

Il n'y a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

- Si $tr(A) = -1$ et $tr(B) = 0$

Pour $X = B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$X + tr(X) A = B + \lambda A + (\underbrace{tr(B)}_{0} + \lambda \underbrace{tr(A)}_{-1}) A$$

$$= B$$

donc X est solution de l'équation :

$$\mathcal{S} = B + Vect(A)$$

<u>Complément.</u> L'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$X \longmapsto X + \mathrm{tr}(X) A$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc l'équation à résoudre, qui s'écrit $u(X) = B$, est une équation linéaire. L'ensemble de ses solutions est de la forme :

- $\emptyset$

ou

- $X_1 + \mathrm{Ker}(u)$ s'il existe une solution X_1

Le résultat ci-avant est bien conforme à la structure de l'ensemble des solutions.